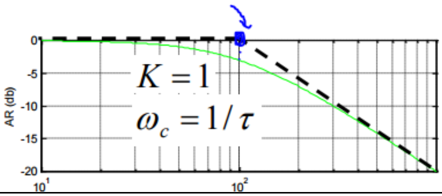
תרגול 8 – תגובות דינמיות

תזכורת- מערכות מסדר ראשון :

Low Pass Filter (LPF)-

פונקציית תמסורת	$H_{\text{LPF,1st}}(s)=\dfrac{1}{\tau s+1}$
הגבר	$\left\|H_{\text{LPF,1st}}(\omega)\right\|=\dfrac{1}{\sqrt{(\tau\omega)^2+1}}$
פאזה	$\angle H_{\text{LPF,1st}}(\omega)=-\arctan(\omega\tau)$
תדירות פינה התדירות שבה האסיפטוטות נחתכות :  	$\omega_c=1/\tau$ הגבר מדויק בתדירות הפינה : $\left\|H_{\text{LPF,1st}}(\omega_c)\right\|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-3[dB]$ שזה גם מגדיר את רוחב הפס של המערכת.

באופן דומה עבור מערכת מעבירה גבוהים

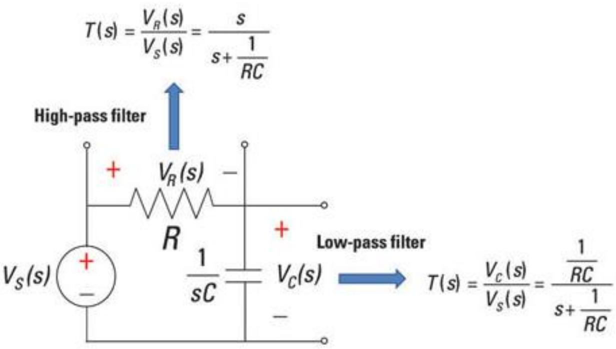
High Pass Filter (HPF)-

פונקציית תמסורת	$H_{\text{HPF,1st}}(s)=\dfrac{\tau s}{\tau s+1}$
הגבר	$\left\|H_{\text{HPF,1st}}(\omega)\right\|=\dfrac{\tau\omega}{\sqrt{(\tau\omega)^2+1}}$
פאזה	$\angle H_{\text{HPF,1st}}(\omega)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan(\omega\tau)$

הערה-שימו לב שעבור המערכות האלו ההגבר הסטטי הוא 1 (0dB). לא לשכוח לקחת את ההגבר הסטטי בחשבון במידה והוא שונה מ-1.

<u>דוגמא:</u>

מעגל נגד+קבל (RC). קבוע הזמן הוא $\tau = RC$. כאשר המתח נמדד על הקבל זהו LPF, וכאשר המתח נמדד על הנגד זהו HPF.



מערכת מסדר שני - מעביר נמוכים-LPF

משוואה דיפרנציאלית	$\ddot{y}+2\zeta\omega_n\dot{y}+\omega_n^2 y=u(t)$ תיאור שקול נוסף: $\ddot{y}+2\zeta\omega_n\dot{y}+\omega_n^2 y=K_s\omega_n^2 u(t)$ כאשר- K_s הוא ההגבר הסטטי של המערכת
פונקציית תמסורת	$G(s)=\dfrac{K_s\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
הגבר	$\lvert G(\omega)\rvert=\dfrac{K_s}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$
פאזה	$\angle G(\omega)=-\arctan\left(\dfrac{2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$

בטבלה הבאה נפרט קצת ביותר פרטים על תגובת התדירות ותגובת המדרגה של המערכת ליחסי ריסון שונים. נניח לשם פשטות שההגבר הסטטי של המערכת הוא 1.

יחסי ריסון שונים	תגובת תדירות	תגובת לכניסת מדרגה
$1<\zeta$	אין תהודה	אין אוסילציות ניתן לחשב את התגובה מסופרפוזציה של שתי מע' מסדר ראשון.
$\zeta=1$		ריסון קריטי, אין אוסלציות: $y_{\text{step}}(t)=1-e^{-\omega_n t}\cdot(1+\omega_n t)$
$0.707<\zeta<1$		יש אוסילציות שדועכות עם הזמן: $y_{\text{step}}(t)=1-\dfrac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot\sin(\omega_d t+\phi)$ כאשר תדירות התנודות המרוסנות נקראת גם "ringing freq": $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ וגם $\phi=\arcsin\left(\dfrac{\omega_d}{\omega_n}\right)$
$\zeta<0.707$	יש תהודה (רזוננס), גודל הרזוננס המקסימלי הוא: $G_{\max}=G(\omega=\omega_R)=\dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$ כאשר $\omega_R=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$	

שגיאה דינמית: מוגדרת עבור כניסה תונדת בלבד (לא עבור כניסת מדרגה!). נגרמת מסטייה של המערכת מהגבר יחידה כתוצאה מרזוננס או מהנחתה (המחשה גרפית בשאלה 1)

מוגדרת על-ידי:

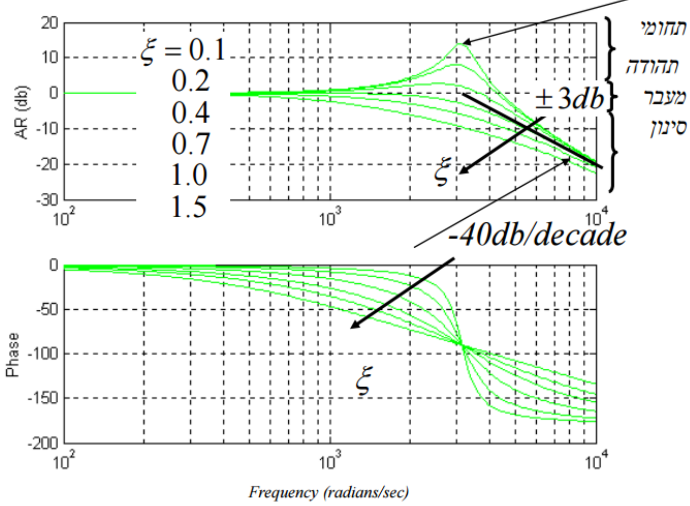
$$e_{dyn}=1-\frac{\lvert G(\omega)\rvert}{K_s}\xrightarrow{\text{if } K_s=1} e_{dyn}=1-\lvert G(\omega)\rvert$$

גרפים מההרצאה:

מערכת מסדר שני LPF

תגובת התדירות

תגובת התדירות – עבור מקדמי ריסון ξ שונים



for $\xi < 0.707$

$$H_{\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

at resonance freq

$$\omega_R = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$$

שגיאה דינמית:

$$1-|H(\omega)|$$

מהירות תגובה:
מאופיינת ע"י פיגור הפזה

<u>זמני עליה והתכנסות:</u> תזכורת מההרצאה (שקפים 28-29)-

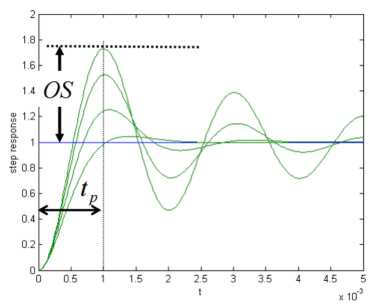
מערכת מסדר שני LPF תת מרוסנות

תגובת יתר לכניסת מדרגה

מקסימום התגובה מתקבל כאשר:

$$\omega_d t = \pi$$

תגובת מדרגה של מערכת תת-מרוסנות (ξ<1)



- *זמן לשיא ראשון:*

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

- *תגובת יתר (overshoot):*

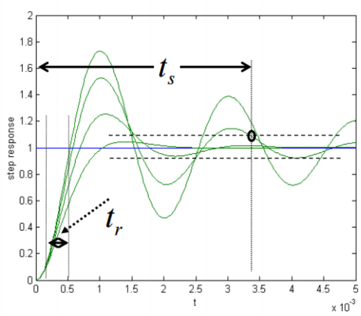
$$OS = \frac{y(t)_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)}$$

$$OS = \exp(-\pi\xi / \sqrt{1-\xi^2})$$

מערכת מסדר שני LPF תת מרוסנות

זמן עליה וזמן התייצבות לכניסת מדרגה

תגובת מדרגה של מערכת תת-מרוסנות (ξ<1)



זמן עליה: (מ-10% ל-90%)

$$t_r = \frac{arctg(-\omega_d/\xi\omega_n)}{\omega_d}$$

$$t_r \cong \frac{1.12 - 0.078\xi + 2.23\xi^2}{\omega_n}$$

זמן התייצבות (Settling time):
הזמן הדרוש לריסון התנודות בתחום $\pm p\%$ מהערך הסופי

$$t_s(p\%) \cong -\frac{\ln(p/100)}{\xi\omega_n}$$

$$t_s(2\%) \cong \frac{4}{\xi\omega_n}$$

שאלה 1-

נתון חיישן כח המתנהג כמערכת מסדר II בעל תדירות טבעית $f_n = 3600[Hz]$ ומנת הריסון $\zeta = 0.25$. מהי התדירות המקסימלית כך שהשגיאה הדינמית של החיישן תהיה עדיין קטנה מ- 6% ?

שאלה 1 – פתרון

מהגדרת השגיאה הדינמית:

$$e_{\text{dyn}} = 1 - \frac{|H(\omega)|}{K_s}$$

אנו מחפשים עבור איזה תדירות מתקבל $e_{\text{dyn}} = \pm 6\%$:

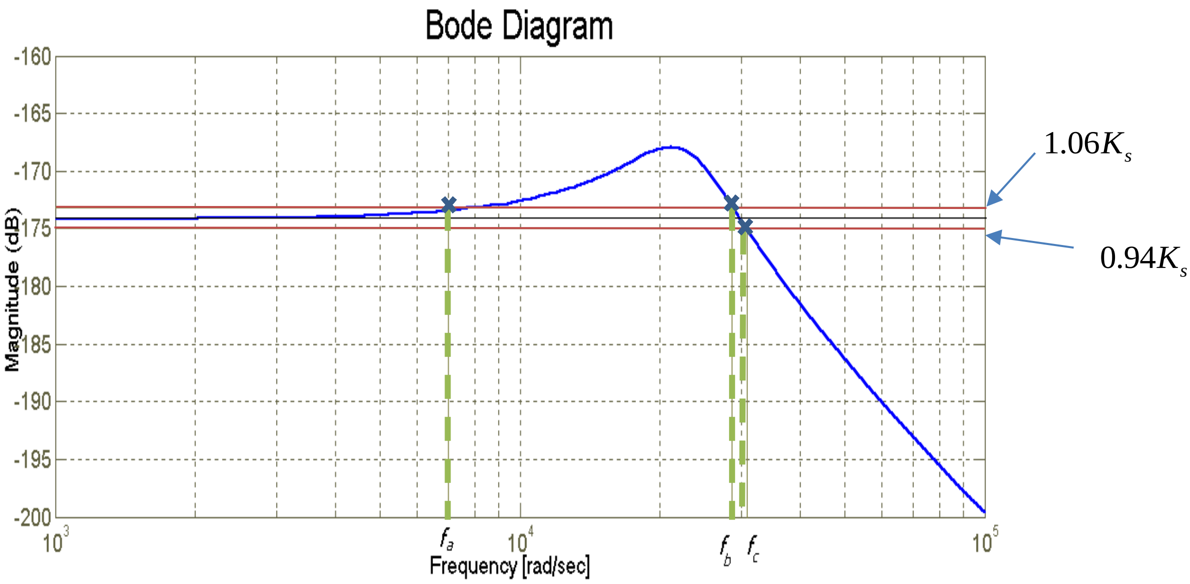
$$\pm 0.06 = 1 - \frac{|H(\omega)|}{K_s} \quad \Rightarrow \quad |H(\omega = ?)| = K_s(1 \pm 0.06)$$

ראשית, נמצא את פונקציית התמסורת של המערכת-

$$H(s) = \frac{K_s \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n = 2\pi f_n = 2\pi \cdot 3600 = 7200\pi[rad]$$
$$\zeta = 0.25$$

בצורה גרפית:



הגרף הנ"ל חותך את התחום בשלושה מקומות אך אותנו מעניין רק התחום השמאלי $(\omega < \omega_a)$

$$H(j\omega) = \frac{K_s \omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2(j\omega)\omega_n \zeta + \omega_n^2}$$

נציב $\omega = \omega_a$ בתור התדר הראשון בו הבודה של המערכת חותך את הקו $1.06K_s$.

$$H(j\omega_a) = \frac{K_s \omega_n^2}{(j\omega_a)^2 + 2(j\omega_a)\omega_n \zeta + \omega_n^2} = \frac{K_s \omega_n^2}{-\omega_a^2 + \omega_n^2 + 2j\zeta\omega_n\omega_a}$$

$$\left|H(j\omega_a)\right| = \frac{K_s\omega_n^2}{\sqrt{\left(\omega_n^2-\omega_a^2\right)^2+\left(2\zeta\omega_n\omega_a\right)^2}} = \frac{K_s}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega_a}{\omega_n}\right)^2\right)^2+4\zeta^2\left(\frac{\omega_a}{\omega_n}\right)^2}} \le 1.06\cdot K_s$$

טיפ חשוב! אל תנסו לפתור ידנית משוואה ממעלה רביעית!

במקום זאת, אנא הגדירו : $q \equiv \left(\frac{\omega_a}{\omega_n}\right)^2$

נקבל (לאחר ההצבה) :

$$\frac{1}{\sqrt{(1-q)^2+0.25q}}\cdot \cancel{K_s} \le 1.06\cdot \cancel{K_s}$$

$$\frac{1}{1.06} \le \sqrt{(1-q)^2+0.25q}$$

$$0.89 \le 1-1.75q+q^2$$

$$0 \le q^2-1.75q+0.11$$

$$q_1 = 0.065 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_a = 0.255\omega_n$$

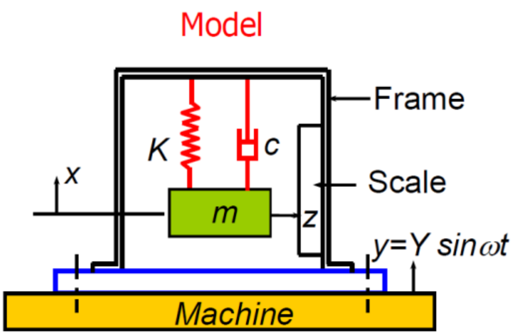
$$q_2 = 1.685 \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{\omega_a = 1.298\omega_n}_{\text{נפסל}}$$

מכאן ש :

$$\omega_a = 0.255\omega_n = 5767\left[\frac{rad}{\sec}\right]$$

שאלה 2-

רוצים למדוד תזוזה, מהירות ותאוצה באמצעות חיישן סיסמי. נתון החיישן לפי הציור הבא (שקף 32 מההרצאה):



m-seismic mass
c-damping coefficient of seismic unit
K-stiffness of spring used in seismic unit
x-absolute displacement of seismic mass
y-base excitation (assume SHM)
z=(x-y) displacement of seismic mass relative to frame

א) כתבו את משוואות התנועה של החיישן (y -כניסה ו- z -יציאה)

ב) כתבו את פונקציית התמסורת עבור 3 המקרים הבאים:

i. כאשר רוצים למדוד תזוזה

ii. כאשר רוצים למדוד מהירות

iii. כאשר רוצים למדוד תאוצה

ג) האם ניתן למדוד בעזרת חיישן:

i. כניסת תאוצה קבועה? (למשל את תאוצת הכובד)

ii. כניסת תזוזה קבועה?

שאלה 2 – פתרון

א) משוואת התנועה בכיוון האנכי:

$$m\ddot{x} = -c\dot{z} - Kz$$

כאשר $z = (x - y)$ והוא התזוזה של המסה יחסית למסגרת החיישן. לכן-

$$m\ddot{x} - m\ddot{y} + m\ddot{y} + c\dot{z} + Kz = 0$$

$$m(\ddot{x} - \ddot{y}) + c\dot{z} + Kz = -m\ddot{y}$$

$$\ddot{z} + \frac{c}{m}\dot{z} + \frac{K}{m}z = -\ddot{y}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \qquad \frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n$$

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_n\dot{z} + \omega_n{}^2 z = -\ddot{y}$$

שימו לב! y היא התזוזה אותה אנחנו מעוניינים למצוא (הכניסה למע' הדינמית) ו- z היא התזוזה אותה אנחנו מודדים

ב) נסכם בטבלה הבאה:

מיקום	$\frac{Z(s)}{Y(s)}=G(s)=\frac{-s^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}$ $G(\omega)=\frac{\omega^2}{\left(\omega_n{}^2-\omega^2\right)+2\zeta\omega_n\omega j}$ $\left\|G(\omega)\right\|=\frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\omega_n{}^2-\omega^2\right)^2+\left(2\zeta\omega_n\omega\right)^2}}$ $\angle G(\omega)=0-\arctan\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n{}^2-\omega^2}\right)$
מהירות	$\frac{Z}{V_Y}=\frac{Z}{Y}\frac{1}{s}=G_V(s)=\frac{-s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}$ $G_V(\omega)=\frac{-j\omega}{\left(\omega_n{}^2-\omega^2\right)+2\zeta\omega_n\omega j}$ $\left\|G(\omega)\right\|=\frac{\omega}{\sqrt{\left(\omega_n{}^2-\omega^2\right)^2+\left(2\zeta\omega_n\omega\right)^2}}$ $\angle G(\omega)=\frac{3\pi}{2}-\arctan\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n{}^2-\omega^2}\right)$
תאוצה	$\frac{Z}{A_Y}=\frac{Z}{Y\cdot s^2}=\frac{-1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}$ $G_A(\omega)=\frac{-1}{\left(\omega_n{}^2-\omega^2\right)+2\zeta\omega_n\omega j}$ $\left\|G(\omega)\right\|=\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_n{}^2-\omega^2\right)^2+\left(2\zeta\omega_n\omega\right)^2}}$ $\angle G(\omega)=\pi-\arctan\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n{}^2-\omega^2}\right)$

ג) פתרון

i. עבור מדידה של תאוצה, ניתן לראות שקיבלנו מערכת LPF. מסקנה, ניתן למדוד תאוצות קבועות!

ii. עבור מדידה של תזוזה, ניתן לראות שקיבלנו מערכת HPF. מסקנה, לא ניתן למדוד תזוזות סטטיות!

שאלה 3-

נדרש למדוד את כניסה המתנהג כגל ריבועי בעל זמן מחזור $T = 2[sec]$. המדידה היא באמצעות חיישן המתנהג כמערכת מסדר ראשון (LPF) עם קבוע זמן $\tau = 0.1[\sec]$.

א. נתון טור פורייה לאות הריבועי:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\left((2k-1)\omega t\right) \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

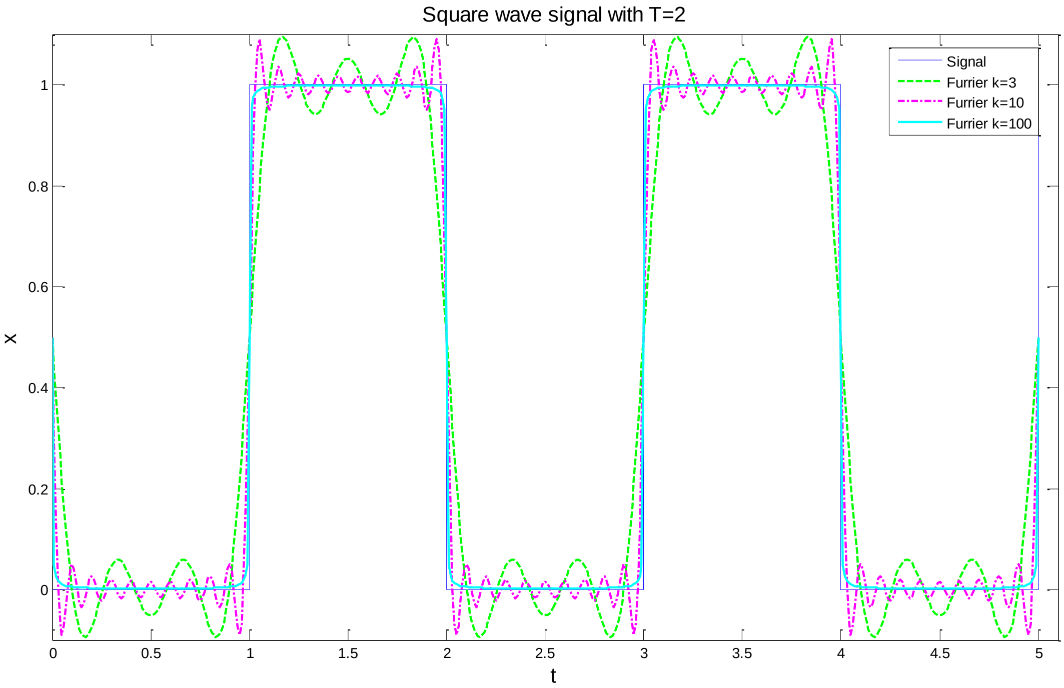
כמה איברים מהטור יעברו ביציאה מהחיישן עם הנחתה שאינה עוברת את ה90%.

ב. מוצע לבצע קירוב לאות היציאה מהחיישן עם מספר האיברים שמצאנו בסעיף ב'. ועם המקדמים שנמצאו בסעיף א'. האם נקבל התאמה? הסבר.

שאלה 3 – פתרון

א. קירוב לטור פורייה:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\left((2k-1)\omega t\right) \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$



התדרים המופיעים בספקטרום האות עבור $T = 2[\sec]$:

$$\omega_k = (2k-1)\omega_1 \quad , \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} = \pi$$

$$\omega_1 = \pi \ , \ \omega_2 = 3\pi \ , \ \omega_3 = 5\pi \ , \ \ldots$$

נמצא את התדר להנחתה של 90% עבור מערכת סדר ראשון עם קבוע זמן τ.

הנחתה של 90% מתרחשת כאשר ההגבר הוא 0.1 –

$$e_{dyn} = 1 - \left|H(\omega)\right| \qquad \Rightarrow \qquad \left|H(\omega)\right| = 1 - 0.9 = 0.1$$

$$\left|H(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} = 0.1$$

$$\rightarrow \frac{1}{1+(0.1)^2\omega^2} = 0.1^2 \rightarrow \omega = 99.5\left[\frac{rad}{\sec}\right]$$

נמצא את האיבר המתאים בטור פורייה –
תזכורת :

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(\omega_k t) \quad , \quad \omega_k = (2k-1)\pi$$

נחפש את $\omega_k = 99.5\left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right]$

$$(2k-1)\pi = 99.5 \rightarrow 2k\pi = 99.5 + \pi \rightarrow k = \frac{99.5+\pi}{2\pi} \approx 16.33 > 16$$

כלומר, כל התדרים בטור פורייה עבור $k > 16$ יונחתו ביותר מ90%.

ב.

לא נקבל התאמה, כי גם האיברים בסדרים הנמוכים יותר מונחתים ויש לקחת זאת בחשבון. מוצא החיישן (לפי תגובת התדירות):

$$y(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|H\left((2k-1)\pi\right)\right|}{2k-1}\sin\left((2k-1)\pi t+\angle H\left((2k-1)\pi\right)\right)$$

ניתן לראות את הקירוב של 16 איברים עם וללא ההנחתה בגרף הבא: