



מערכות משולבות חיישנים

מפרטים דינאמיים

מפרטים דינאמיים

שגיאה דינאמית וזמן תגובה

תיאור מתמטי של חיישנים (ומערכות עיצוב אות)

כמערכות ליניאריות

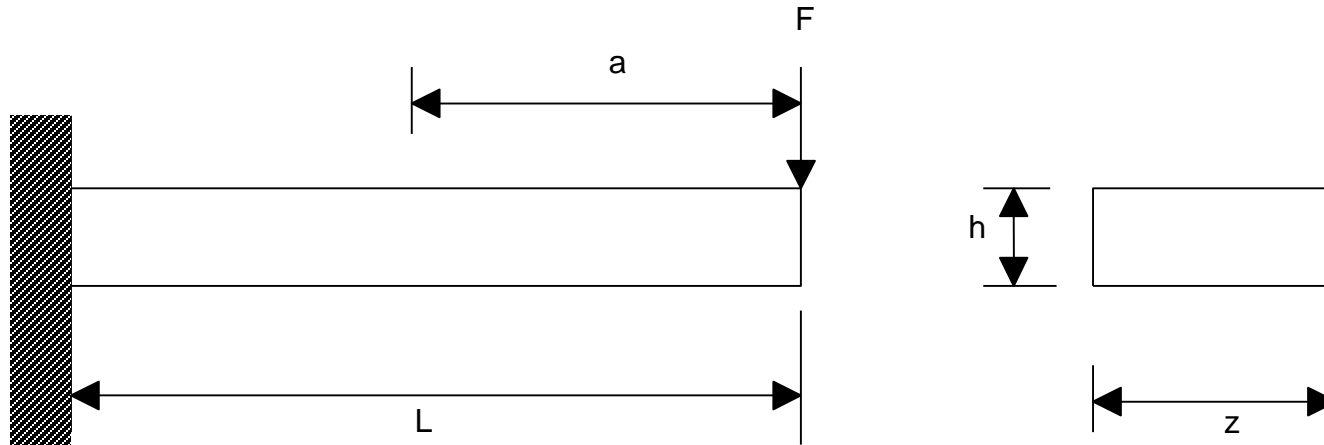
מתמר סיסמי

אנליזה ספקטרלית (התמרת פורייה)



מפרטים/מודלים דינמיים של מערכות מדידה

למה??



קורה רתומה בעלת חתך מלבני עשויה מפלדה, מיועדת למדידת כוח F .

בהנחה שהתדר העצמי של הקורה הוא f_n ,
והשגיאה הדינאמית המקסימלית המותרת היא 5% ,
מה יהיה תחום התדרים של הכוח F הניתן למדידה ?? נמק.



מפרט דינמי

- מאפיין את תגובת המערכת לשינויים בכניסה
- אפיון מלא ניתן ע"י פונקצית התמסורת / תגובת התדירות
- אפשר להסיק לגבי פ"ת מתוך:
 - ידע על עקרון העבודה <<< מבנה כללי של פ"ת
 - מספר מאפיינים <<< גודל הפרמטרים בפ"ת
- מאפייני ביצועים:
 - מהירות תגובה – הזמן שלוקח לתגובה להגיע לערך המתאים לאילוץ
 - שגיאה דינמית – הפרש בין תגובה דינמית וסטטית לאילוצים שווים בגודל
 - תחום התדירות בדיוק נתון – תחום התדרים בהם השגיאה הדינמית קטנה מאחוז מסוים



קביעת מאפיינים דינמיים

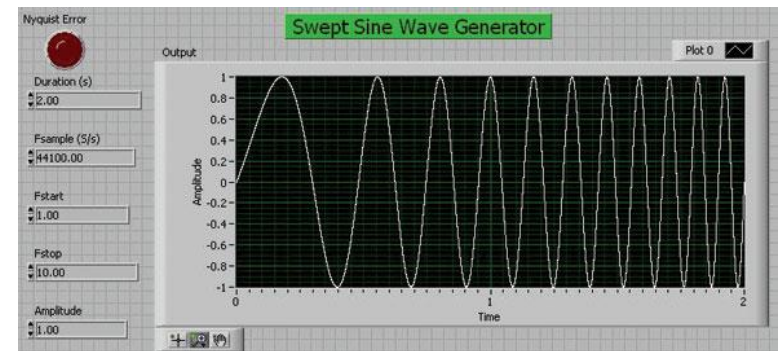
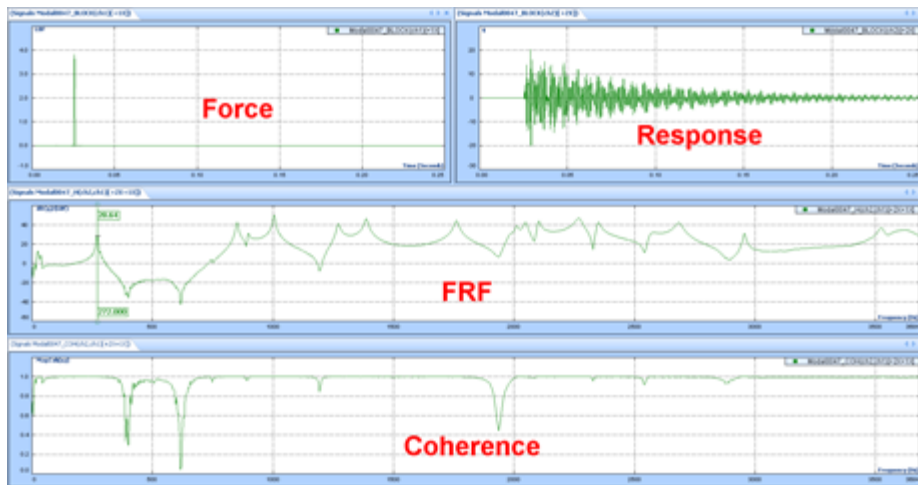
● נקבעים ע"י אותות בדיקה (*test signals*) מתאימים:

– אות הلم *Impulse response*

– אות מדרגה *Step Response*

– אותות מחזוריים *Harmonic response*

– אותות אקראיים *Random Response*





תיאור תגובת המערכת

- פונקצית תמסורת – מתארת קשר כניסה/יציאה בין האותות המותמרים

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}; \quad Y(s) = L[y(t)]; \quad X(s) = L[x(t)] \quad (\text{עבור תנאי התחלה אפס})$$

- תגובת התדירות – מתארת תגובה לכניסה מחזורית במצב מתמיד

$$H(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}; \quad Y(j\omega) = F[y(t)]; \quad X(j\omega) = F[x(t)]$$

- תגובת הלים – מתארת את תגובת המערכת לאות הלים

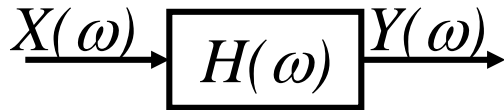
(Impulse response)

$$h(t) = F^{-1}[H(j\omega)] = g(t) = L^{-1}[G(s)] \quad - \text{ במערכת סטציונרית}$$

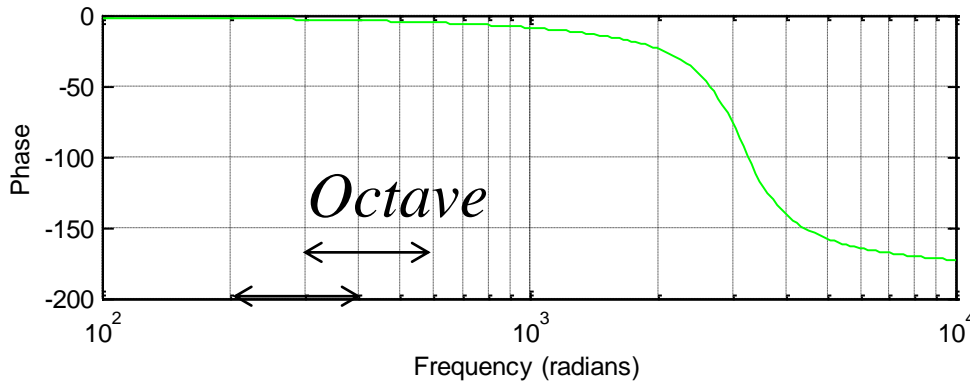
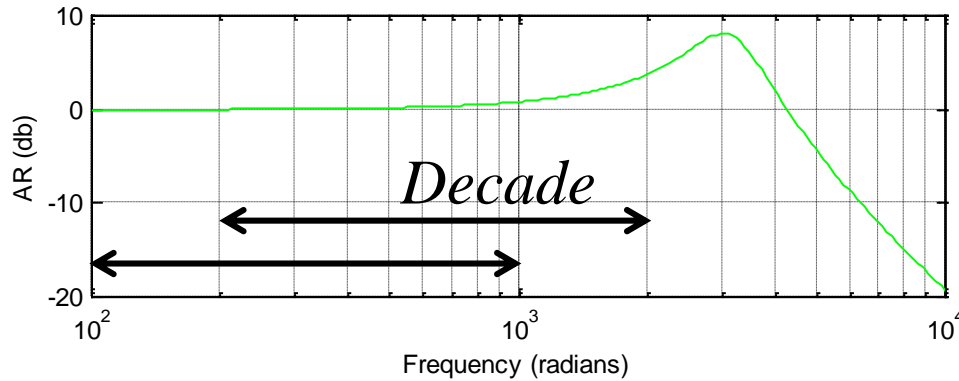


תיאור בודה

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\angle X(\omega)}$$



- תיאור גרפי פולרי של ספקטרום תגובת התדירות במישור התדר.
- במערכת לינארית:



$$|Y(\omega)| = |H(\omega)||X(\omega)|$$

$$\angle Y(\omega) = \angle H(\omega) + \angle X(\omega)$$

- תיאור בודה:

– אמפליטודה: $20 \log_{10}|H(\omega)|$

– פאזה: $\angle H(\omega)$

כפונקציה של: $\log_{10} \omega$



תיאור מתמטי של מד טמפרטורה

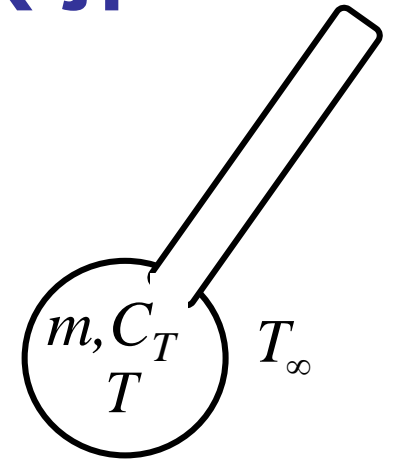
מערכת מסדר ראשון

m = מסת הנוזל בתרמומטר

C = החום הסגולי של הנוזל

U = מקדם מעבר חום

A = שטח פני התרמומטר



$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = mC_T \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{dQ}{dt} = UA\Delta T$$

$$\Rightarrow mC_T \frac{dT}{dt} = UA(T_\infty - T)$$

General form: $\tau \dot{y} + y = K F(t)$

$$\tau \dot{T} + T = T_\infty ; \tau = \frac{mC_T}{UA} ; K = 1 ; F(t) = T_\infty$$

• שימור אנרגיה:

• שינוי האנרגיה \leftarrow שינוי טמפרטורה

• קצב מעבר חום תלוי בהפרש טמפרטורה



קבוע הזמן של מד טמפרטורה

תלות בהסעה

$$\tau = \frac{mC_T}{hA}$$

• קבוע הזמן של חיישני טמפרטורה:

– במפרט מצוין באילו תנאים זה נקבע.

לדוגמא:

– water flowing at 3ft/sec (1m/s)

– air flowing at 10ft/sec (3m/s).

– עבור חיישן RTD מפלטינה מצוין קבוע זמן והתנאים בהם

נמדד:

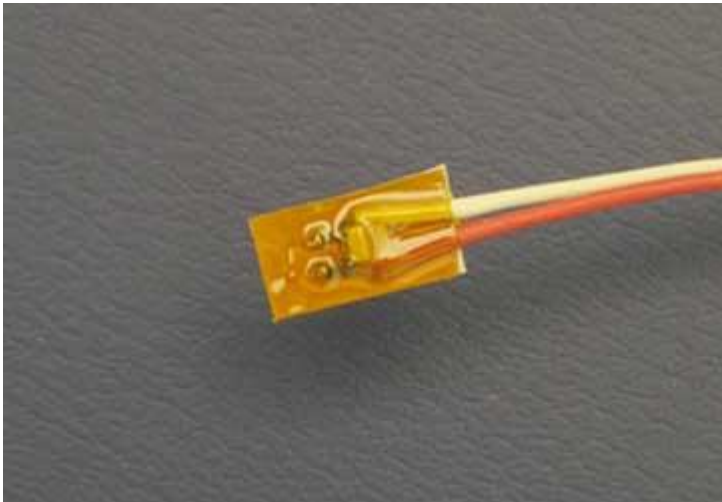
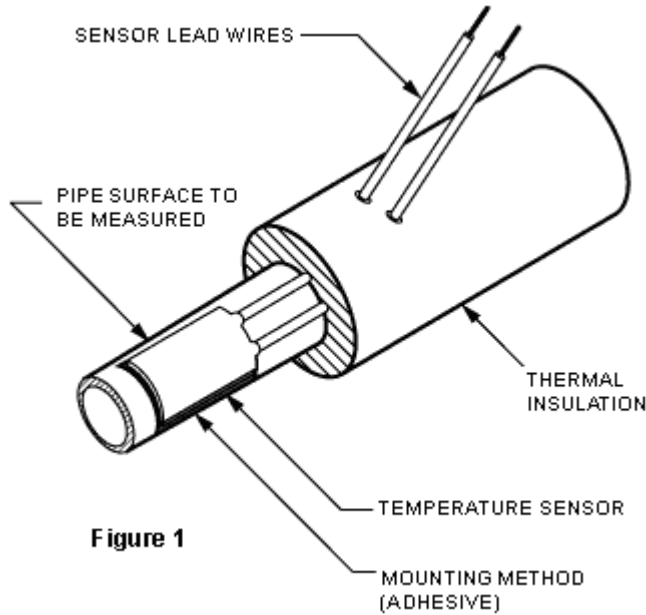
– 3.1 seconds in water at 3 ft/sec





קבוע הזמן של מד טמפרטורה

תלות בהולכה



- חיישני טמפרטורת שמחוברים ישירות לגוף שאת הטמפרטורה שלו הם מודדים – מעבר החום נעשה בהולכה.

- קבוע הזמן ניתן ע"י

$$\tau = \frac{mC_T}{kL}$$

$$k = \text{מקדם ההולכה}$$

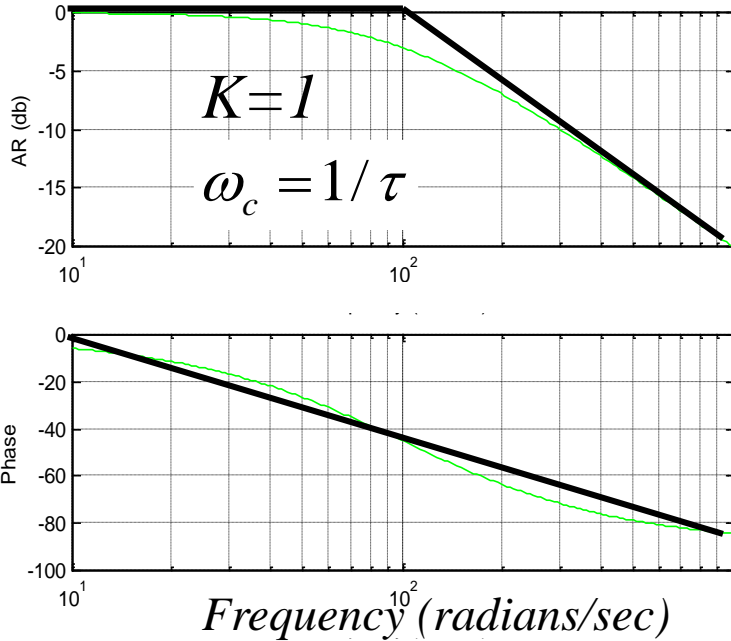
$$L = \text{עובי ההדבקה}$$

Time Constant

< 0.3 seconds on metal surfaces



מערכת מסדר ראשון (LPF)



מסנן מעביר נמוכים LPF:
 כניסה בתדר נמוך עוברת,
 כניסה בתדר גבוהה מונחת

• מד"ר: $\tau \dot{y} + y = K F(t)$

• תגובת תדירות:

$$H(\omega) \equiv G(j\omega) = \frac{K}{j\omega\tau + 1}$$

• יחס אמפליטודה:

$$AR = |H(\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}}$$

• פאזה: $\angle H(\omega) = -\arctg(\omega\tau)$

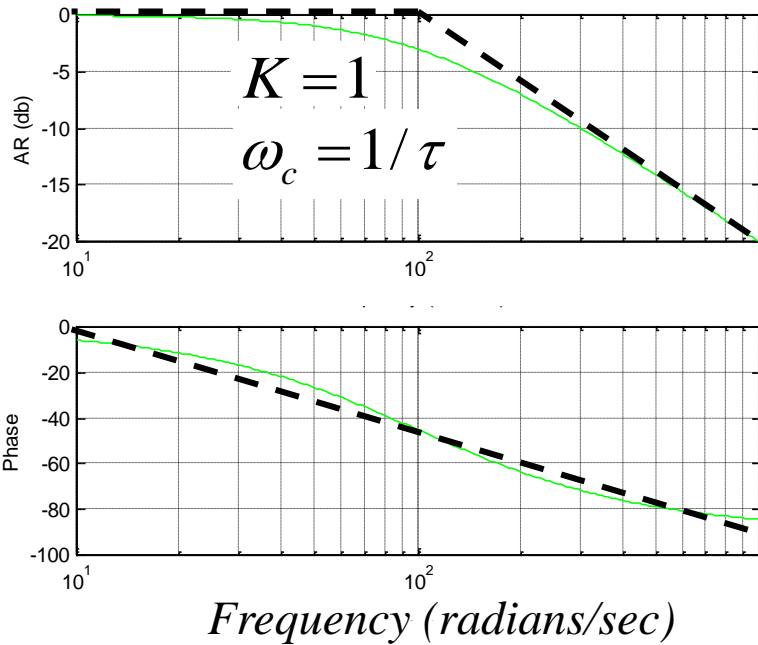
• תיאור בודה: $AR_{db} \equiv 20 \log_{10} |H(\omega)|$

$$= 20 \log K - 10 \log((\omega\tau)^2 + 1)$$

• תדירות פינה: $\omega_c = 1/\tau$



מערכת מסדר ראשון (LPF) - המשך



● אסימפטוטות – יחס אמפליטודה:

$$20\log_{10}|H(\omega)| \rightarrow \begin{cases} 20\log K & \omega\tau \ll 1 \\ 20\log K - 20\log(\omega\tau) & \omega\tau \gg 1 \end{cases}$$

– תדירות פינה $\omega_c = 1/\tau$

– התדירות שבה האסימפטוטות נחתכות.

– בתדירות הפינה:

$$AR(\omega_c \text{ \& } K = 1) = -3db$$

● אסימפטוטות – פאזה:

$$\angle G(j\omega) = -\arctg(\omega\tau) \rightarrow \begin{cases} 0 & \omega\tau \ll .1 \\ -\frac{\pi}{4} [\log(\omega\tau) + 1] & 0.1 < \omega\tau < 10 \\ -\pi/2 & \omega\tau \gg 10 \end{cases}$$

במערכת מסדר ראשון מעבירה

נמוכים LPF מתקבל פיגור פאזה

– בתדירות הפינה: $Phase \angle G(j\omega) = -\pi/4$



מערכת מסדר ראשון (LPF) - המשך

תגובה במישור הזמן ומישור התדר

Differential equation: $\tau \dot{y} + y = K F(t)$

Input $F(t) = A \sin \omega t$

frequency dependent

Output $y(t) = C e^{-\frac{t}{\tau}} + B(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$

where

$$B(\omega) = \frac{KA}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

amplitude of steady-state response

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}(\omega\tau)$$

phase shift

Note in steady state: $y_{ss}(t) = B(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$

$$M(\omega) = \frac{B(\omega)}{B(0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

magnitude ratio



מערכת מסדר ראשון (LPF) - דוגמא

A certain thermometer has a time constant of 15 sec and a initial temperature of 20 °C. The thermometer was subjected to a very slow harmonic disturbance having a frequency of 0.01 Hz.

What is the time delay in the response of the thermometer and how much does the steady state amplitude response decrease ?

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}(\omega\tau) \quad \boxed{\text{phase shift}}$$

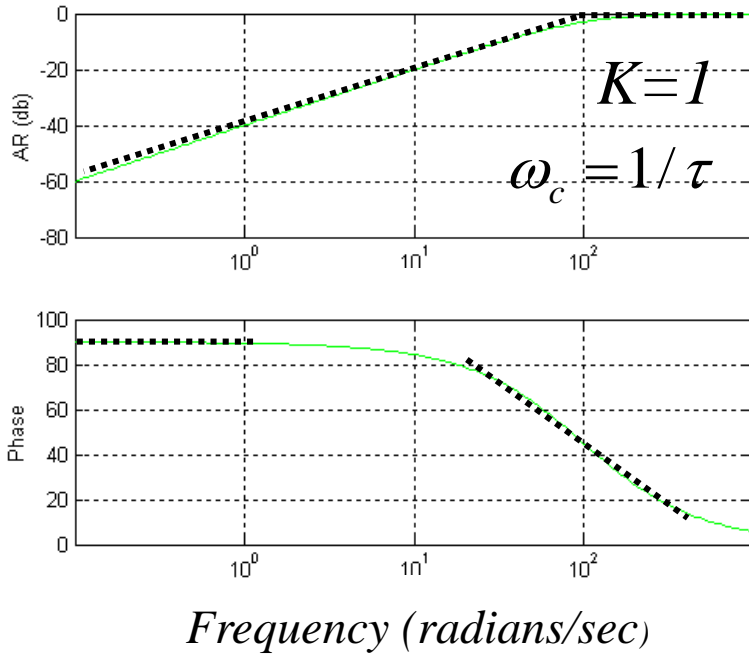
$$M(\omega) = \frac{B(\omega)}{B(0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \quad \boxed{\text{magnitude ratio}}$$

Solution: Time delay = 12.0 s

Amplitude response decrease = 27.2%



מערכת מסדר ראשון (HPF)



• תזכורת: LVDT

• מד"ר: $\tau \dot{y} + y = K \tau \dot{x}$

• תגובת תדירות:

$$H(\omega) = \frac{K j\omega\tau}{j\omega\tau + 1}$$

• יחס אמפליטודה:

$$|H(\omega)| = \frac{K\omega\tau}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}}$$

• תיאור בודה:

$$20 \log_{10} |H(\omega)| = 20 \log K\tau\omega - 10 \log ((\omega\tau)^2 + 1)$$

• אסימפטוטות:

מסנן מעביר גבוהים HPF:
כניסה בתדר נמוך מונחתת,
כניסה בתדר גבוהה עוברת

$$20 \log_{10} |H(\omega)| \rightarrow \begin{cases} 20 \log(K\omega\tau) & \omega\tau \ll 1 \\ 20 \log K & \omega\tau \gg 1 \end{cases}$$



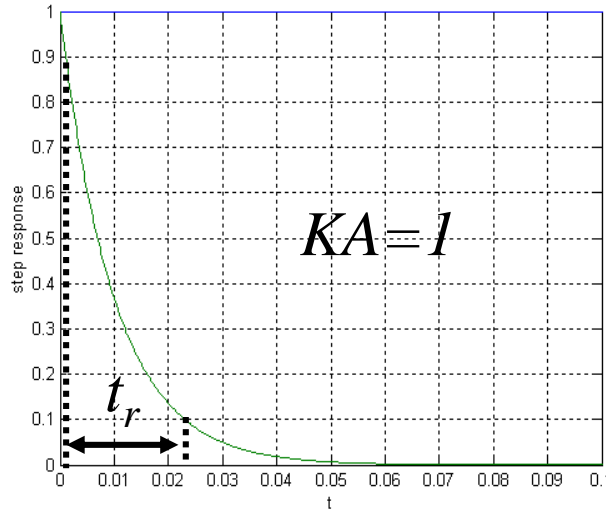
מערכת מסדר ראשון

תגובת מדרגה

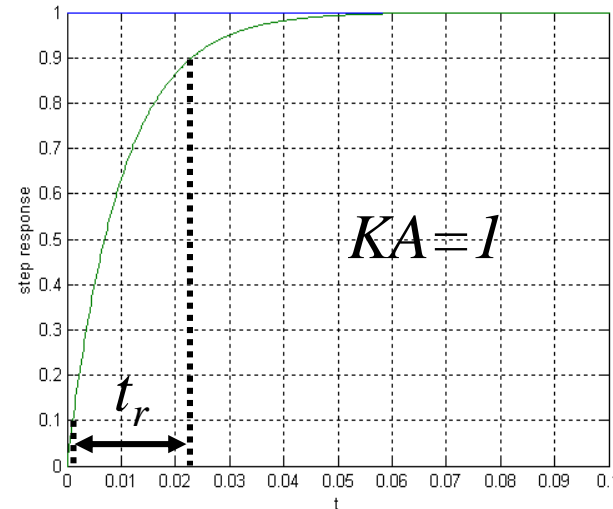
$$y_{HPF} = (y_0 + KA)e^{-t/\tau}$$

$$y_{LPF} = KA + (y_0 - KA)e^{-t/\tau}$$

HPF



LPF



זמן העלייה t_r (rise time) = הזמן הדרוש כדי שהתגובה לאילוף מדרגה תעלה מ-10% ל-90% מהתגובה הסופית

$$t_r = \ln(9)\tau = 2.2\tau \cong \frac{0.35}{f_c}$$

במערכת מסדר ראשון זמן העלייה הוא:

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau}$$



מערכת מסדר ראשון - LPF

תגובת מדרגה

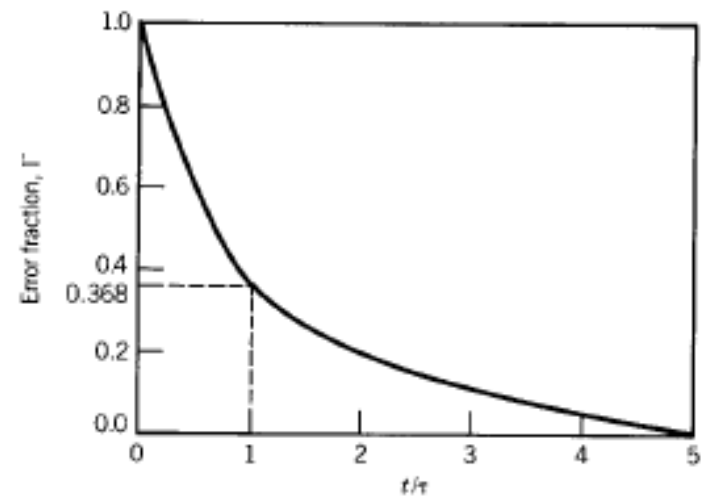
$$y(t) = \underline{KA} + (y_o - \underline{KA})e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{or} \quad y(t) = y_\infty + (y_o - y_\infty)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{y(t) - y_\infty}{y_o - y_\infty} = \Gamma(t) \quad \text{error fraction}$$

(Figliola & Beasley, 1995)

FIGURE 3.7 First-order system time response to a step function input: the error fraction, Γ .

t/τ	Γ
0.0	1.000
1.0	0.368
2.0	0.135
3.0	0.050



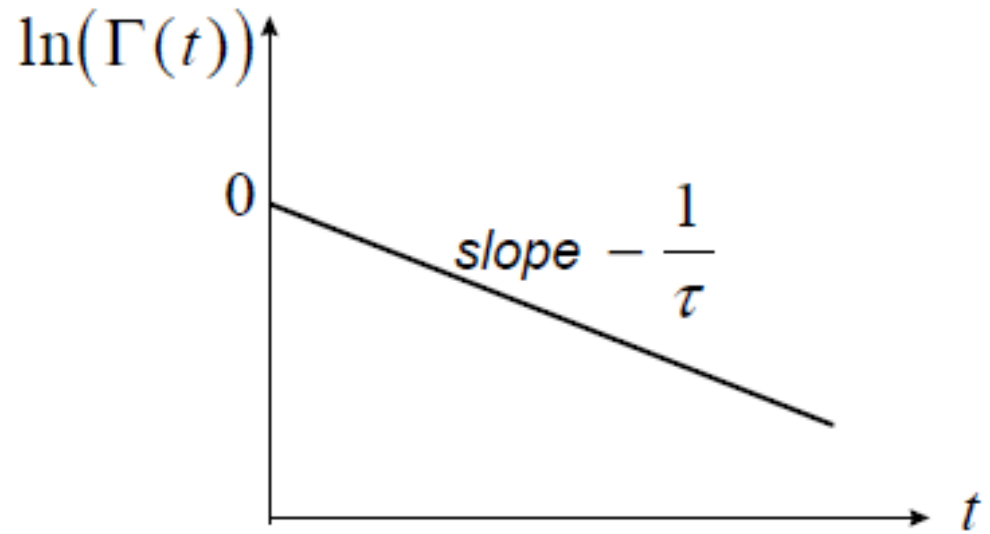


מערכת מסדר ראשון - LPF

מציאת קבוע הזמן

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{y(t) - y_{\infty}}{y_0 - y_{\infty}} = \Gamma(t)$$

$$\ln\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = -\frac{t}{\tau} = \ln\left(\frac{y(t) - y_{\infty}}{y_0 - y_{\infty}}\right) = \ln(\Gamma(t))$$



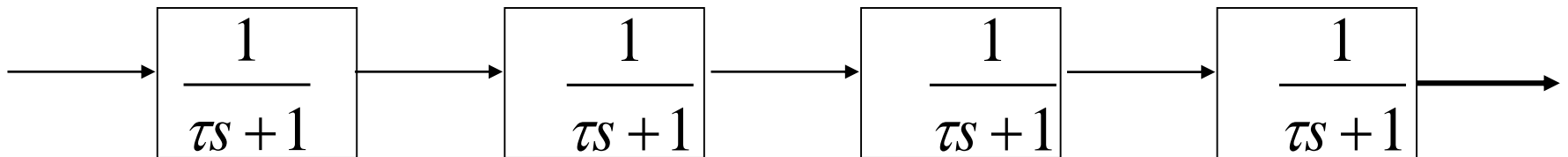
Useful to experimentally determine time constant



מסננים מסדרים גבוהים לעיבוד אות

- מסננים בעיבוד אותות
 - הנחתה של רעשים
 - שימושים נוספים בהמשך: מסנן נגד התחזות (Anti-aliasing)

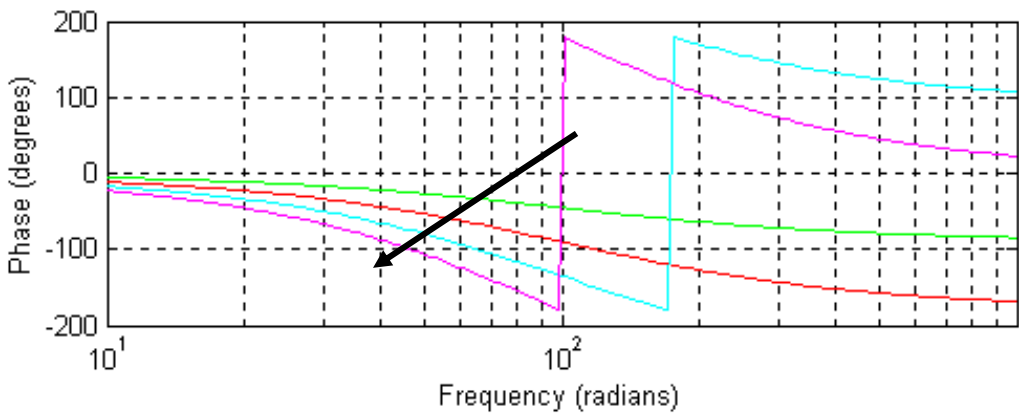
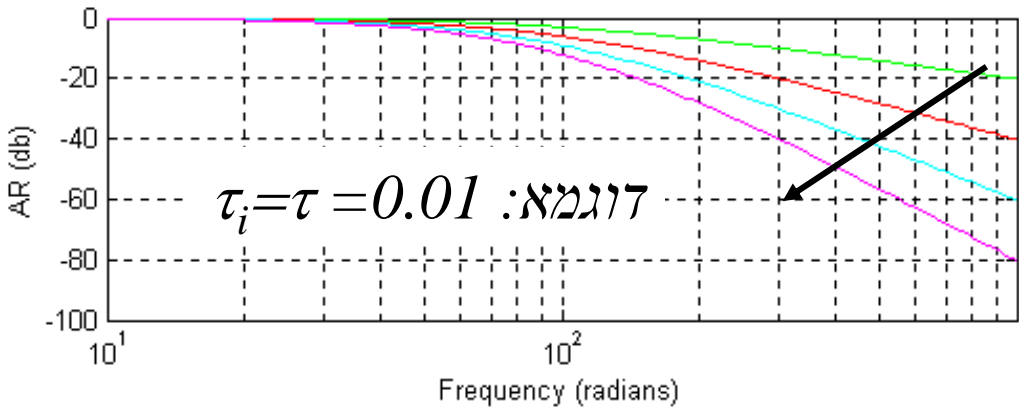
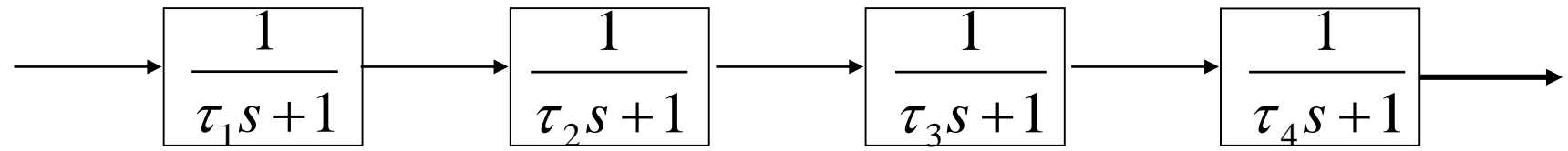
- מסננים מסדר גבוה
 - לדוגמא: שרשרת של מסננים מסדר ראשון





מסננים מסדרים גבוהים – שרשור מסננים

תגובת התדירות



תגובת תדירות:

$$H(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega)H_3(\omega)H_4(\omega)$$

שיפוע ההנחתה הולך וגדל

$$-20db * order / decade$$

מהירות התגובה מאופיינת

ע"י פיגור פזה הולך וגדל

$$\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) + \phi_3(\omega) + \phi_4(\omega)$$

$$-90degrees * order$$

At high freq.

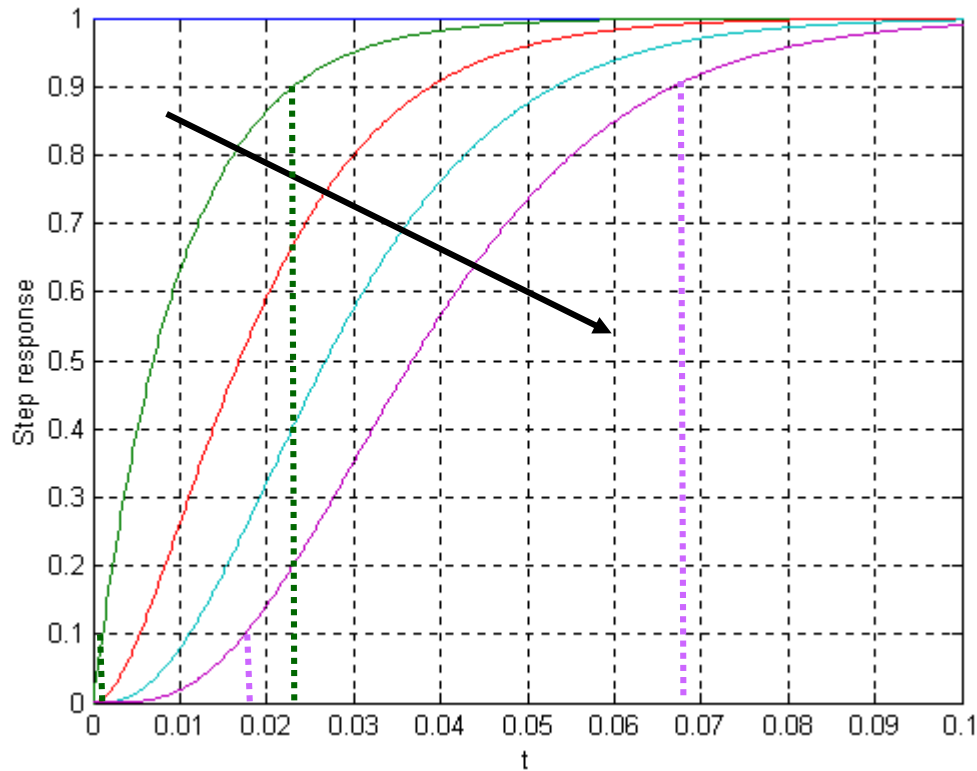


מסננים מסדר גבוה

תגובת מדרגה

תגובת מדרגה:

זמן תגובה מאופייין ע"י עיכוב זמן עליה שגדלים עם סדר המערכת





מסננים אקטיביים

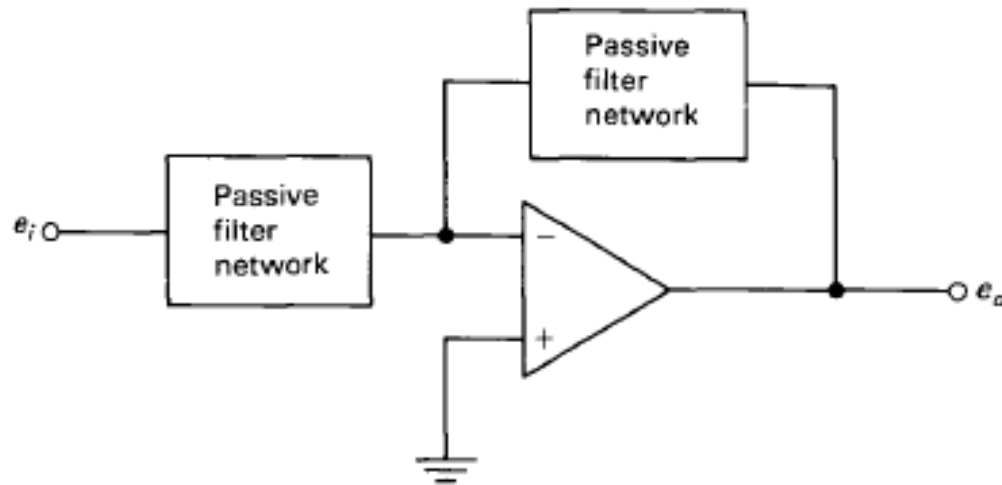
– Passive Filter

- ◆ no powered components
- ◆ some type of R-L-C arrangement

– Active Filter

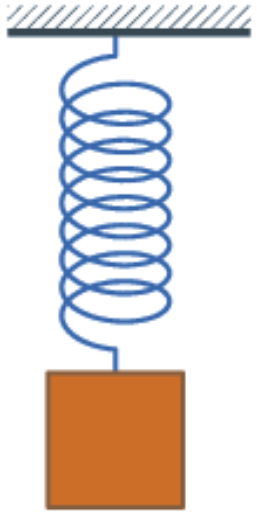
- ◆ uses powered components
- ◆ can have very steep roll-off, flat passband, and adjustable cut-off frequency

Figure 7.33 Basic active filter circuit (Beckwith, et al, 1993)



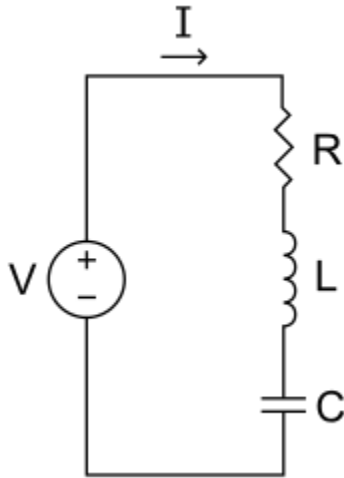


מודלים של מערכות מסדר שני



$$\Rightarrow \ddot{y} + 2\xi\omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y = f(t)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \xi = \frac{C}{2\sqrt{km}}$$



$$\Rightarrow \ddot{I} + 2\xi\omega_n \dot{I} + \omega_n^2 I = \dot{V}(t)$$

$$L \sim m \quad R \sim C \quad C \sim 1/k$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

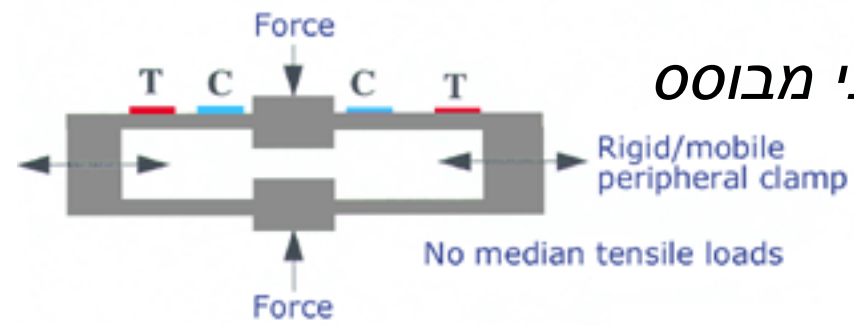
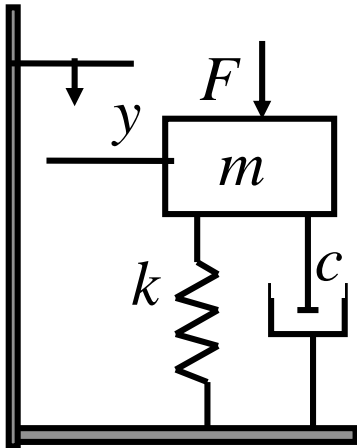


מערכת מסדר שני – מד כוח

עיקרון ומבנה כללי



- עיקרון ידוע
- מבנה כללי של חישן כוח אלסטיי:
 - מסה על אלמנט קפיצי
 - הכוח (F) גורם לתזוזה/ עיבור (y)
 - שנמדד ע"י חיישן משני
 - מדי עיבור
 - גביש פייזואלקטרי
- דוגמא:

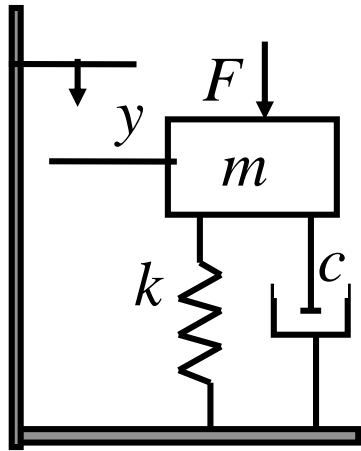


– חיישן משני מבוסס

מדי עיבור



מד כוח - מודל כללי



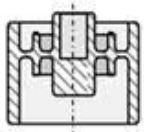
משוואה דינאמית: $m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F(t)$

הגדרות:

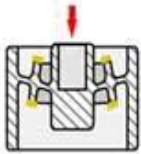
תדירות טבעית: $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

מקרה פרטי: מד כח אלסטי עם מדי עיבור

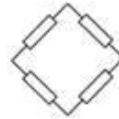
יחס ריסון: $\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$



Spring element



When a force is applied, a strain is generated that is converted into a change in resistance by the strain gauges.



The Wheatstone bridge converts the change in resistance into a voltage that can be measured.

הגבר: $K = \frac{1}{m}$

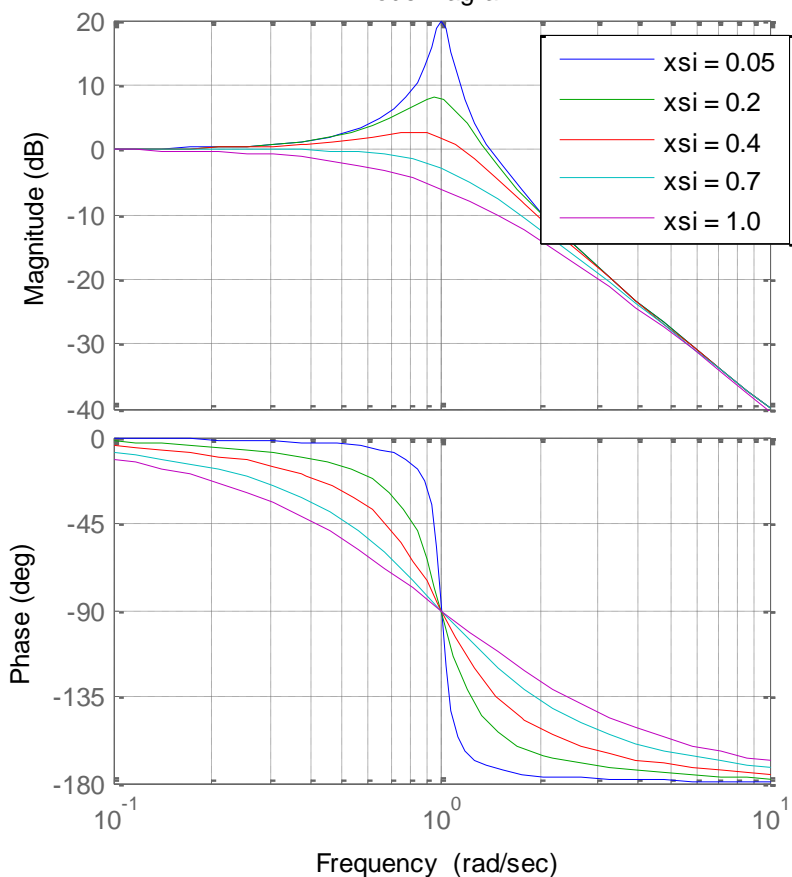
משוואה כללית: $\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = KF(t)$

מד כוח – מערכת מסדר שני LPF

תגובת התדירות

$$\omega_n = 1$$

Bode Diagram



פונקציית התמסורת:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K}{s^2 + 2\omega_n \xi s + \omega_n^2}$$

תגובת תדירות:

$$H(\omega) \equiv G(j\omega) = \frac{K / \omega_n^2}{(1 - \omega^2 / \omega_n^2) + 2j\xi\omega / \omega_n}$$

$$M = \frac{H(\omega)}{H(0)} = \frac{1}{(1 - \omega^2 / \omega_n^2) + 2j\xi\omega / \omega_n}$$

מעביר כוחות שמשתנים בתדירויות

הנמוכות מ- ω_n

מתוכנן עם תדירות טבעית גבוהה:

מסה קטנה וקפיץ קשיח

בד"כ (בחיישנים פרמטריים) עם

מקדם ריסון ~ 0.7 למה? (ראה בהמשך)



מערכת מסדר שני LPF

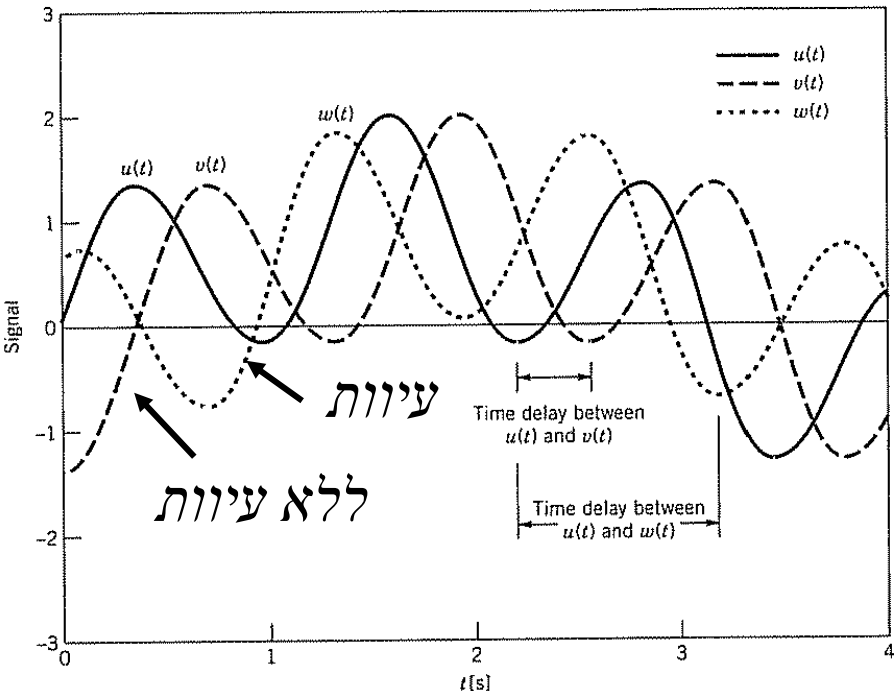
לינאריות הפאזה (תגובת התדירות) – חשיבות למניעת עיוותים

Example:

$$u(t) = \sin(t) + \sin(5t)$$

$$v(t) = \sin(t - 0.35) + \sin(5t - 1.75)$$

$$w(t) = \sin(t - 0.35) + \sin(5t - 5)$$



למערכת עם $\xi = 0.707$ קיים תחום תדירויות רחב יותר שבו:

- שגיאת האמפליטודה קטנה
- פיגור הפאזה משתנה באופן לינארי
- הלינאריות בפיגור פאזה ($\xi \geq 0.707$) מונעת עיוות.

אות כניסה:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\omega_0 t)$$

$$= \sin(\omega_0 t) + \sin(2\omega_0 t) + \dots$$

אות יציאה עם פיגור לינארי לא מעוות

$$v(t) = \sin(\omega_0 t - \phi) + \sin(2\omega_0 t - 2\phi) + \dots$$

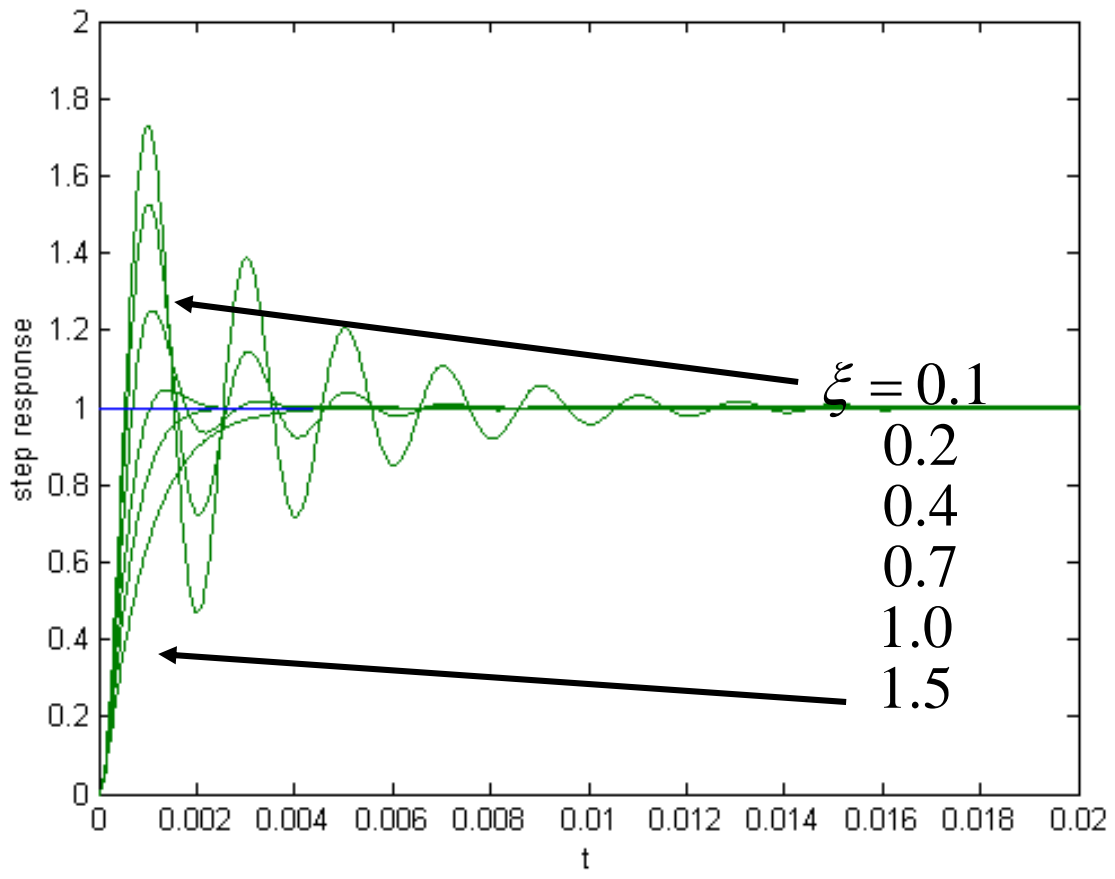
$$\theta = \omega_0 t - \phi$$

$$v(t) = \sin(\theta) + \sin(2\theta) + \dots$$



מערכת מסדר שני LPF - תגובת מדרגה

תגובת מדרגה – עבור מקדמי ריסון ξ שונים



תגובת מדרגה:
על ריסון: $\xi > 1$, אין תנודות
ניתן לפרק לשתי מע' מסדר 1

ריסון קריטי: $\xi = 1$, אין תנודות
 $s(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} (1 + \omega_n t)$

תת-ריסון: $\xi < 1$
תנודות דועכות בתדר:

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ Ringing freq

$s(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_d t + \varphi)$

$\varphi = \arcsin(\omega_d / \omega_n)$



מערכת מסדר שני LPF תת מרוסנת

תגובת יתר לכניסת מדרגה

מקסימום התגובה מתקבל כאשר:

$$\omega_d t = \pi$$

- זמן לשיא ראשון:

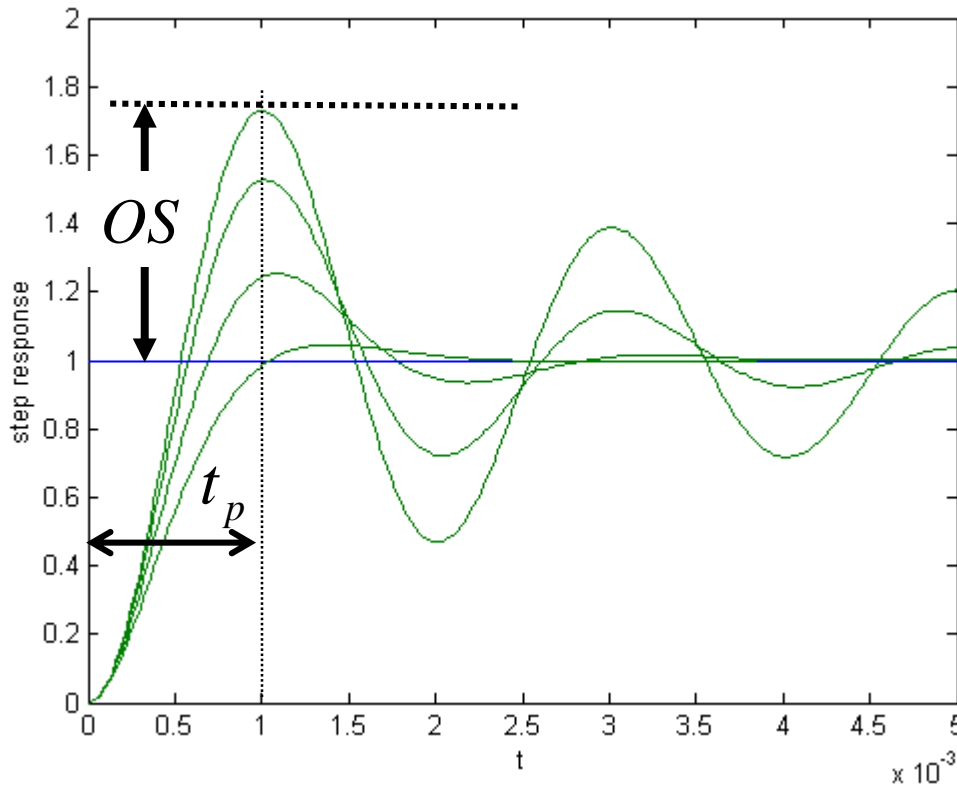
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

- תגובת יתר (overshoot):

$$OS = \frac{y(t)_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)}$$

$$OS = \exp(-\pi\xi / \sqrt{1-\xi^2})$$

תגובת מדרגה של מערכות תת-מרוסנות ($\xi < 1$)

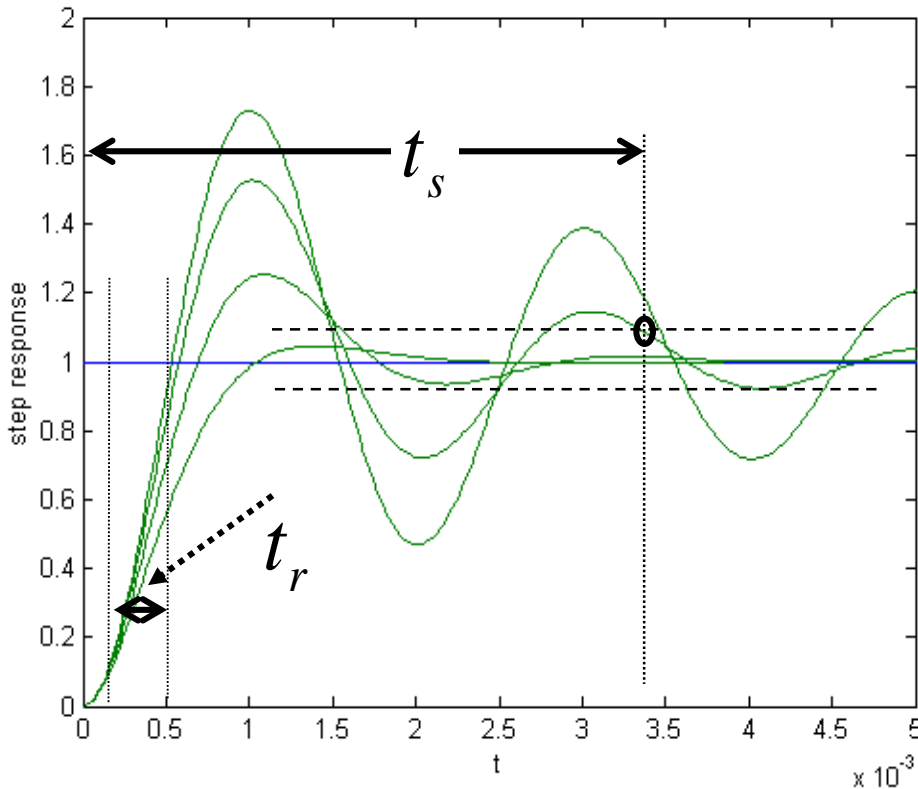




מערכת מסדר שני LPF תת מרוסנת

זמן עליה וזמן התייצבות לכניסת מדרגה

תגובת מדרגה של מערכות תת-מרוסנות ($\xi < 1$)



זמן עליה: (מ-10% ל-90%)

$$t_r = \frac{\arctg(-\omega_d / \xi \omega_n)}{\omega_d}$$

$$t_r \cong \frac{1.12 - 0.078\xi + 2.23\xi^2}{\omega_n}$$

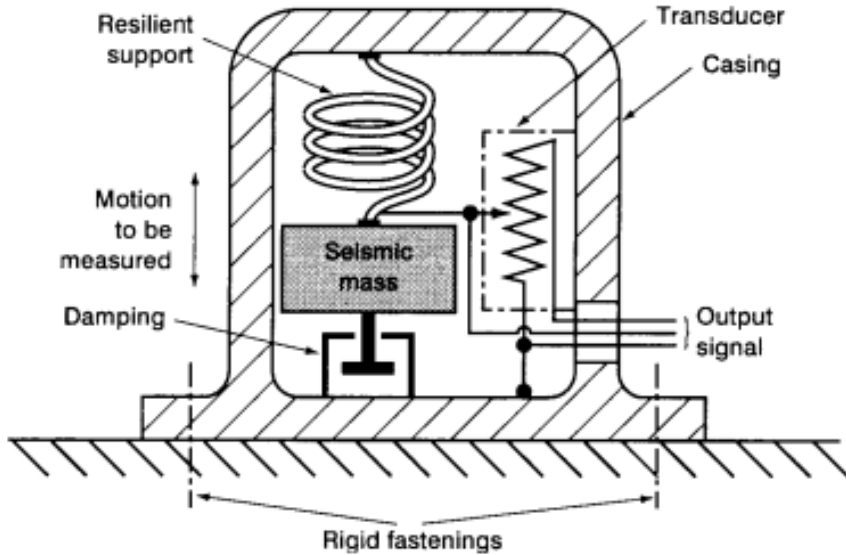
זמן התייצבות (Settling time): הזמן הדרוש לריסון התנודות בתחום $\pm p\%$ מהערך הסופי

$$t_s(p\%) \cong -\frac{\ln(p/100)}{\xi \omega_n}$$

$$t_s(2\%) \cong \frac{4}{\xi \omega_n}$$



מתמר סיסמי - מבנה בסיסי



מבנה בסיסי:

- בית החיישן מחובר באופן קשיח למבנה שנדרש למדוד את תנועתו.
- מסה סיסמית (ידועה) מחוברת דרך אלמנט קפיצי (עם ריסון) לגוף המתמר.
- אלמנט חישה משני מודד את המיקום היחסי של המסה ביחס לבית המתמר.

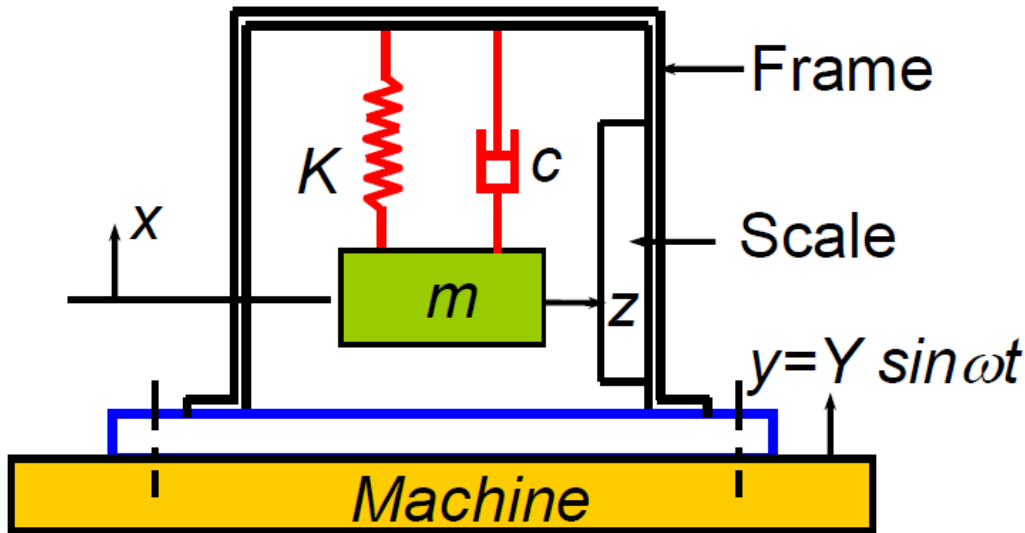
אלמנטי חישה משניים:

- פוטנציומטר (בשרטוט)
- בד"כ: מדי עיבור, חיישן קיבולי, גביש פייזואלקטרי, LVDT,



ניתוח מתמר סיסמי

Model



m -seismic mass

c -damping coefficient of seismic unit

K -stiffness of spring used in seismic unit

x -absolute displacement of seismic mass

y -base excitation (assume SHM)

$z=(x-y)$ displacement of seismic mass relative to frame



ניתוח מתמר סיסמי - המשך

Equation of motion of the seismic mass:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + K(x - y) = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

Let, relative displacement of seismic mass is $z=(x-y)$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + Kz = -m\ddot{y} \quad \dots\dots\dots(2)$$

consider base excitation to be Simple Harmonic Motion

$$y(t) = Y \sin \omega t \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + Kz = m\omega^2 Y \sin \omega t \quad \dots\dots\dots(4)$$

The above equation represents a equation of motion of a forced vibration with $m\omega^2 Y = F$

משוואה 4 דומה למשוואה של מד כוח בשקף 24



ניתוח מתמר סיסמי - המשך

$$z(t) = Z \sin(\omega t - \phi)$$

Displacement

Differentiating

$$\dot{z}(t) = \omega Z \cos(\omega t - \phi)$$

$$\dot{z}(t) = \omega Z \sin(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2})$$

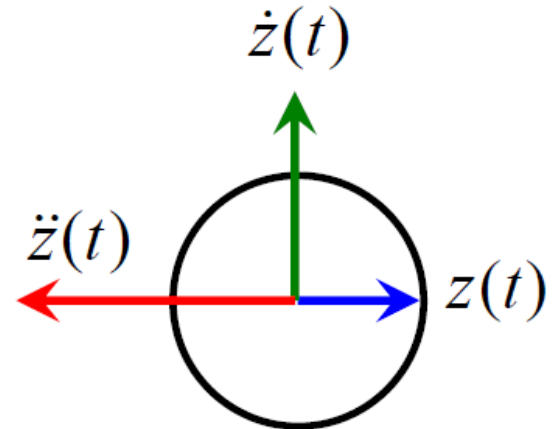
Velocity

$$\ddot{z}(t) = -\omega^2 Z \sin(\omega t - \phi)$$

$$\ddot{z}(t) = \omega^2 Z \sin(\omega t - \phi + \pi)$$

Acceleration

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + Kz = F \sin \omega t$$





ניתוח מתמר סימני

פתרון משוואת התנועה

$$z(t) = \frac{r^2 Y}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin(\omega t - \phi) \quad \text{— הפתרון למצב מתמיד:}$$

$$Z = \frac{r^2 Y}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad \text{— תגובת תדירות:}$$

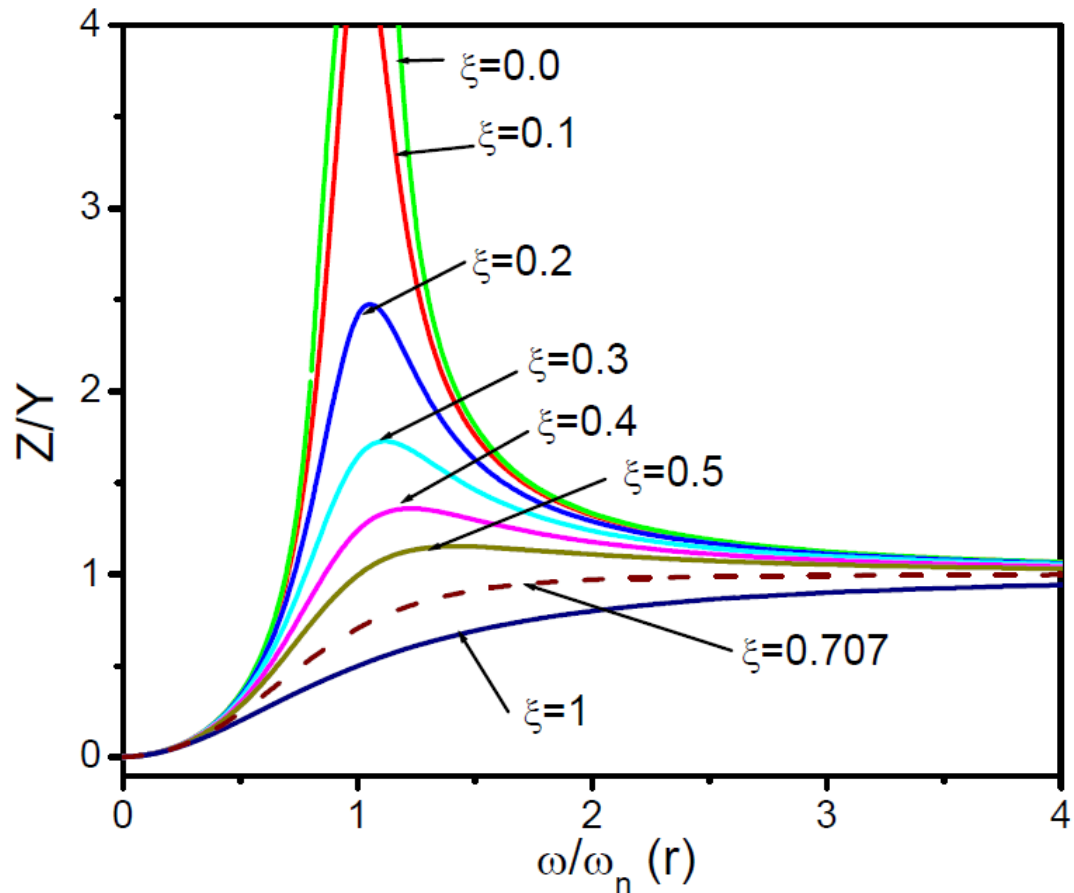
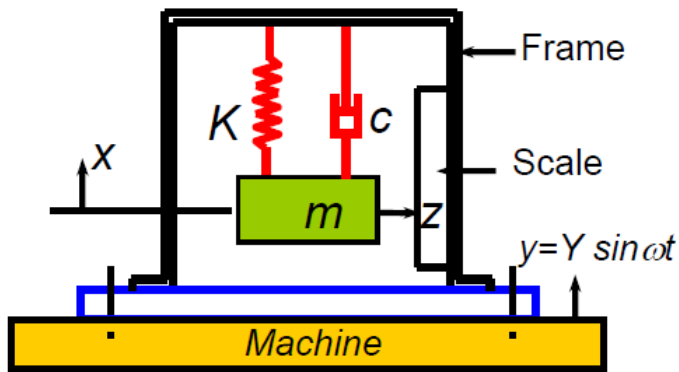
$$\frac{Z}{Y} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r}{1-r^2} \right) \quad \text{— פיגור פאזה:}$$

$$r = \omega / \omega_n \quad ; \quad \omega_n = \sqrt{K / m} \quad ; \quad \xi = c / 2\sqrt{K m} \quad \text{— כאשר:}$$

תגובה דינמית של מתמר סיסמי

לזיהוי תזוזה HPF



$$\frac{Z}{Y} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

ξ is damping Ratio

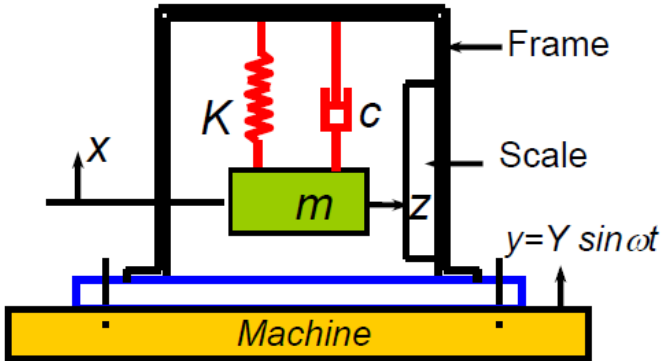
r is frequency Ratio

$$\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \cong 1 \Rightarrow z(t) = Y \sin(\omega t - \phi)$$

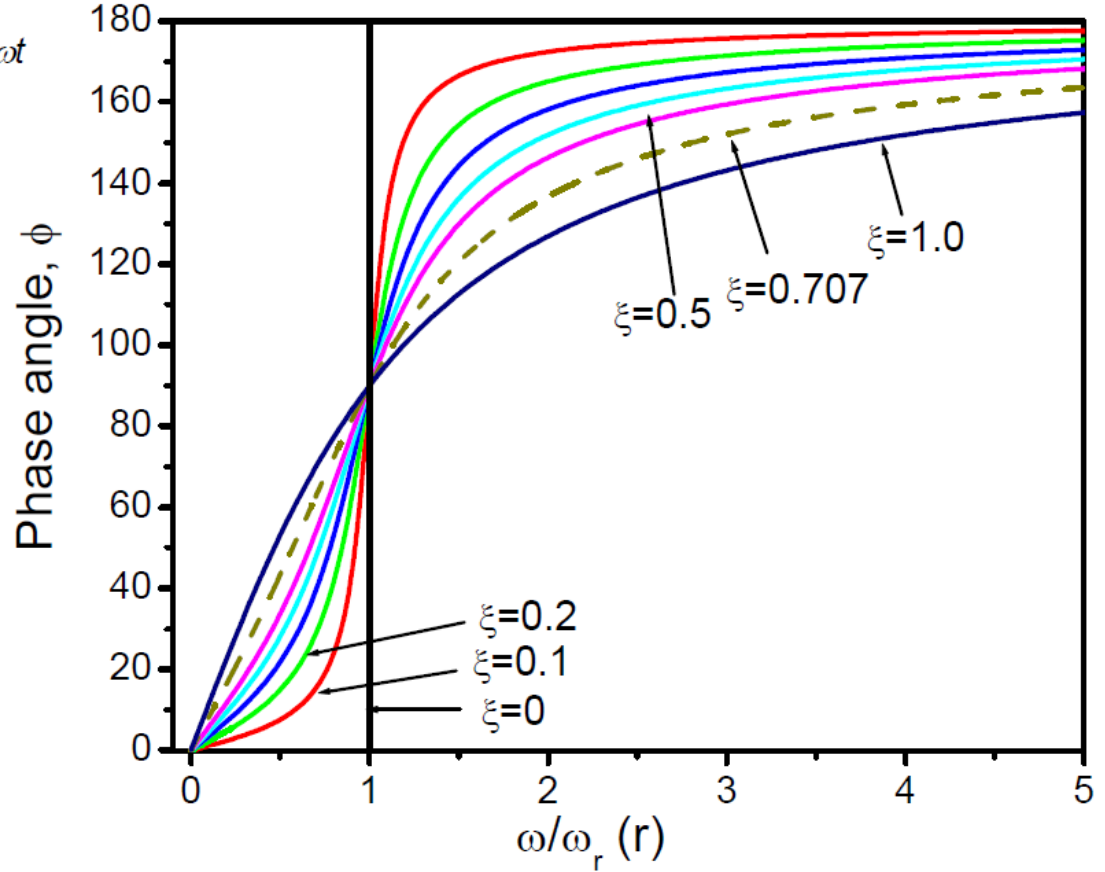


תגובה דינמית של מתמר סיסמי - פאזה

לזיהוי תזוזה HPF



$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r}{1-r^2} \right)$$





תגובה דינמית של מתמר סיסמי

לזיהוי מהירות HPF

Condition for Velometer (as for Vibrometer):

When:
$$\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \cong 1 \Rightarrow z(t) = Y \sin(\omega t - \phi)$$

$$\Rightarrow \dot{z}(t) = \dot{y}(t) \quad \text{With some phase lag } \phi$$

תגובה דינמית של מתמר סיסמי

לזיהוי תאוצה LPF

$$Z = \frac{r^2 Y}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

— תגובת התדירות של מתמר
סיסמי:

$$\ddot{Y} = -\omega^2 Y$$

— הגדרת תאוצה:

$$\Rightarrow \frac{Z}{(\ddot{Y} / \omega_n^2)} = \frac{Z}{r^2 Y} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = M$$

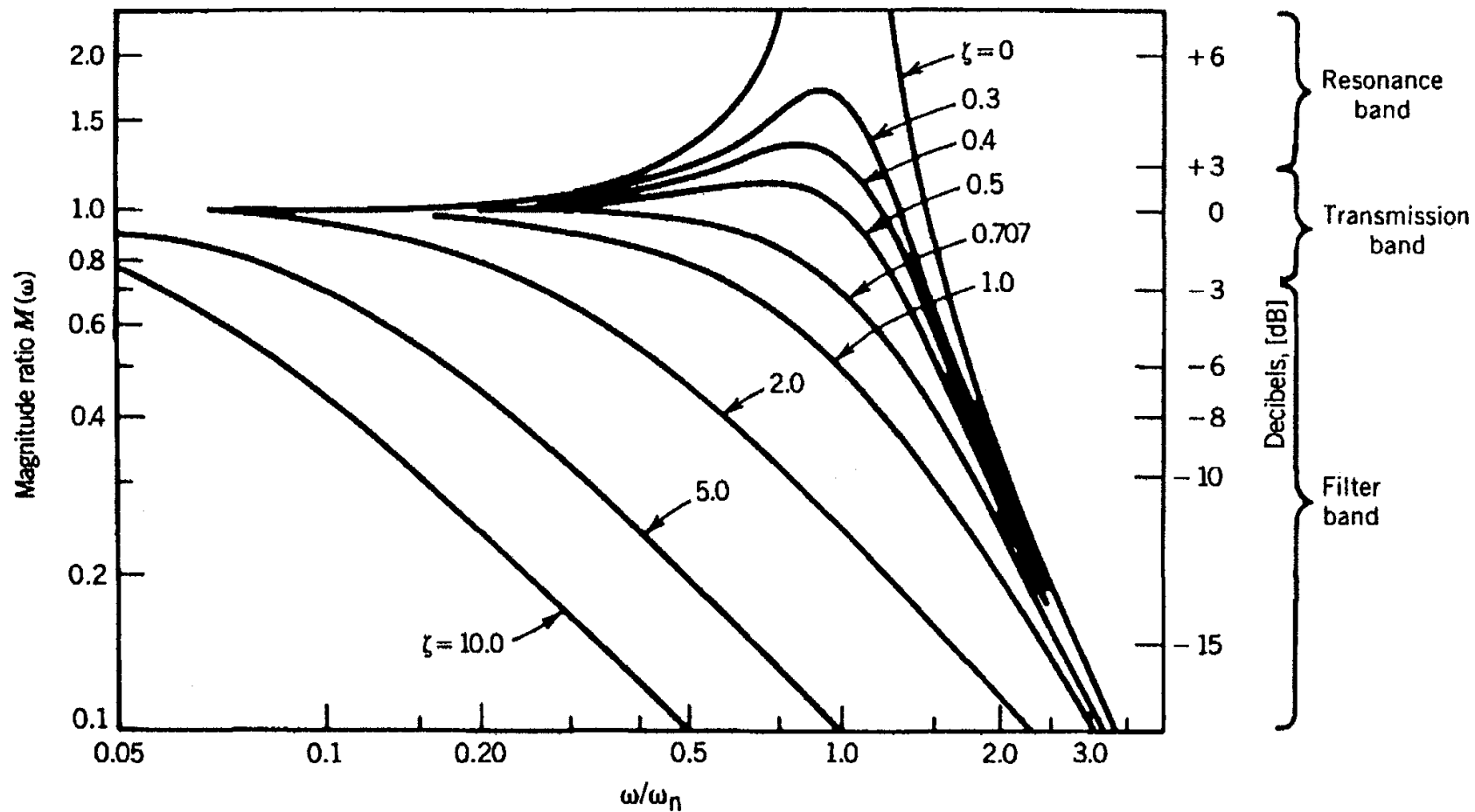
$$r = \omega / \omega_n \quad ; \quad \omega_n = \sqrt{K / m} \quad ; \quad \xi = c / 2\sqrt{K m}$$

$$\text{When: } M \Rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad (\ddot{Y} / \omega_n^2) = Z \quad \Rightarrow \quad \ddot{Y} = Z * \omega_n^2$$

תגובה דינמית של מתמר סיסמי

לזיהוי תאוצה LPF

(Figure 3.16, Figliola & Beasley, 1995)



To achieved desired behavior, Magnitude Ratio should be unity



מד תאוצה מבוסס מדי עיבור

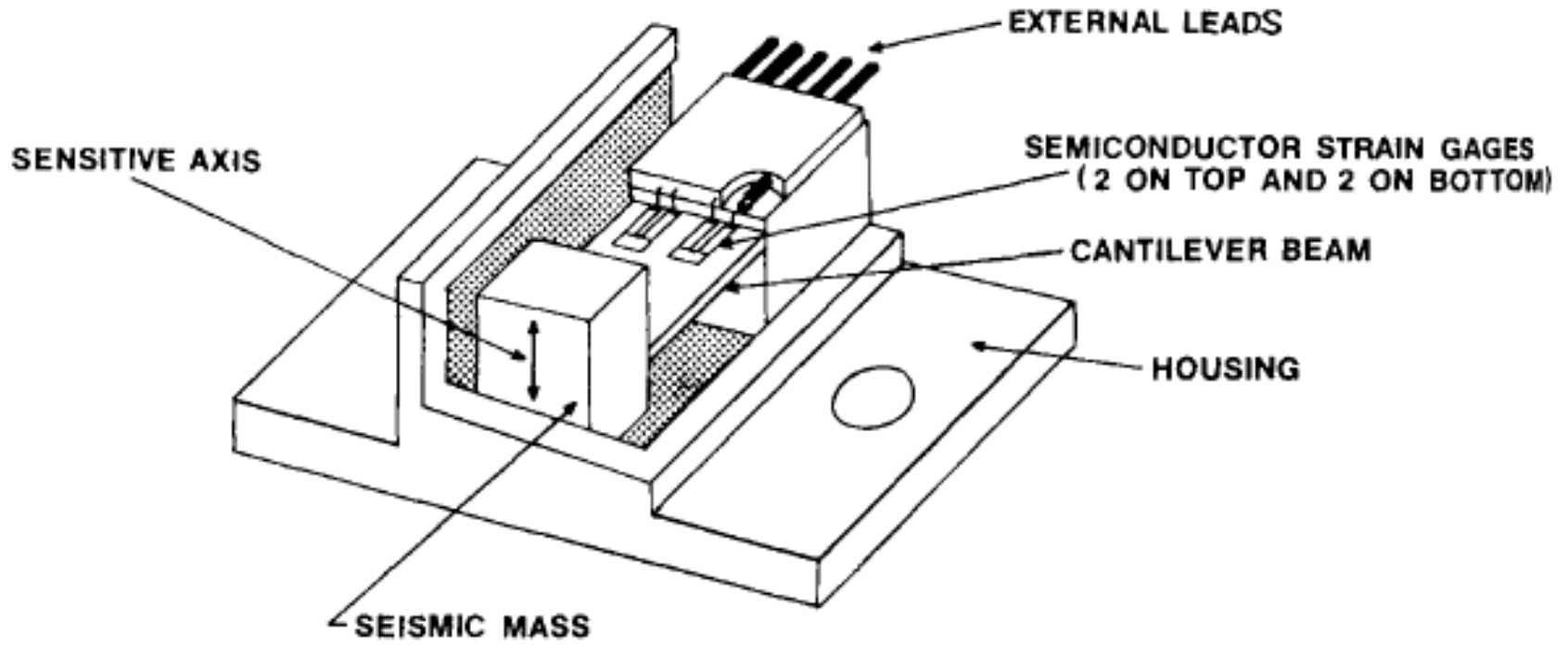


FIGURE 7-11. Bonded-semiconductor-strain-gage accelerometer.
(Courtesy of Entran Devices, Inc.)



מד תאוצה קיבולי MEMS

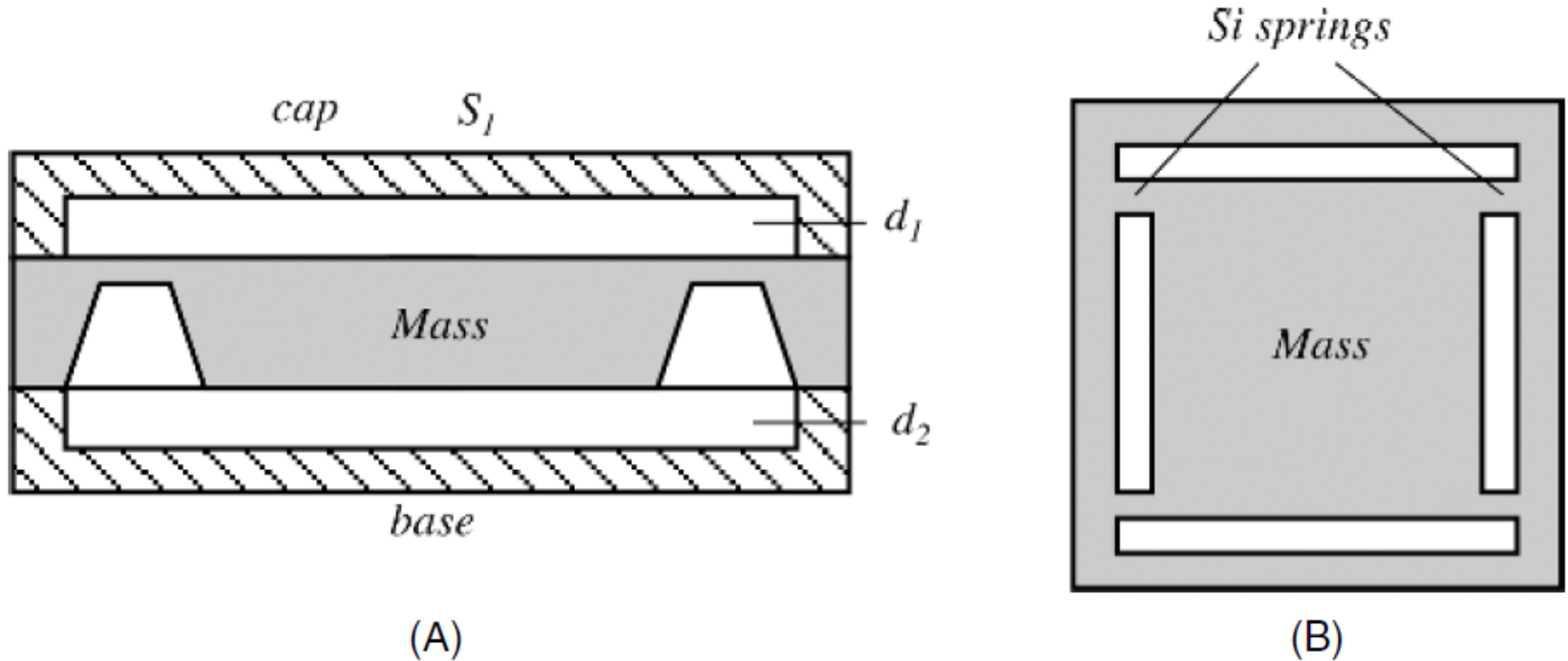


Fig. 8.3. Capacitive accelerometer with a differential capacitor: (A) side cross-sectional view; (B) top view of a seismic mass supported by four silicon springs.



מד תאוצה קיבולי MEMS

דוגמא

- מימוש עם חיישן קיבולי:
 - מסה סיסמית נעה בין לוחות קבועים
 - נוצרים שני קבלים משתנים משני צדי המסה (קבלים דיפרנציאליים)
 - הקבלים משתנים כתלות בתזוזת המסה

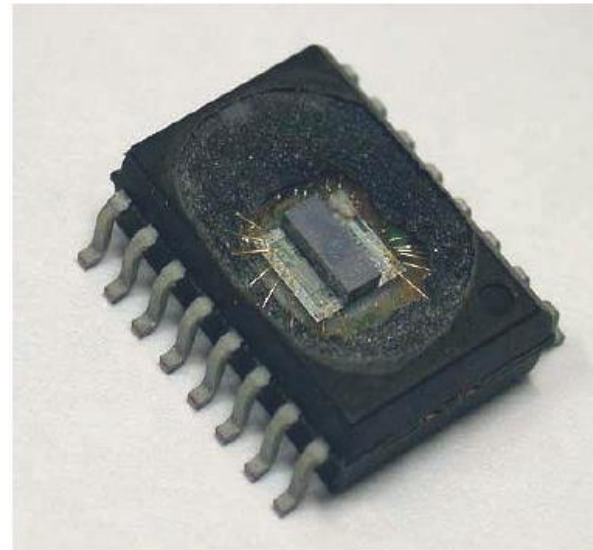
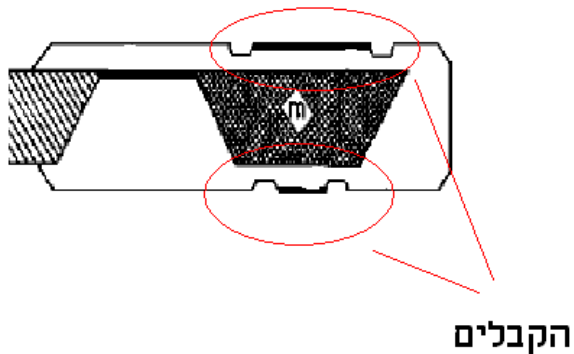
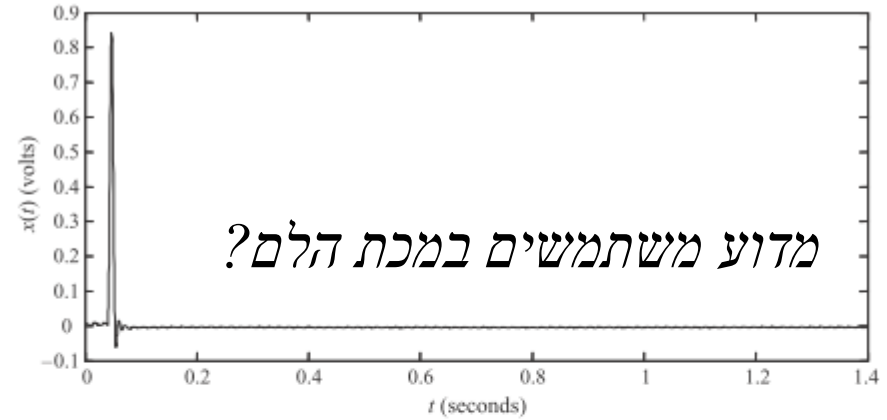
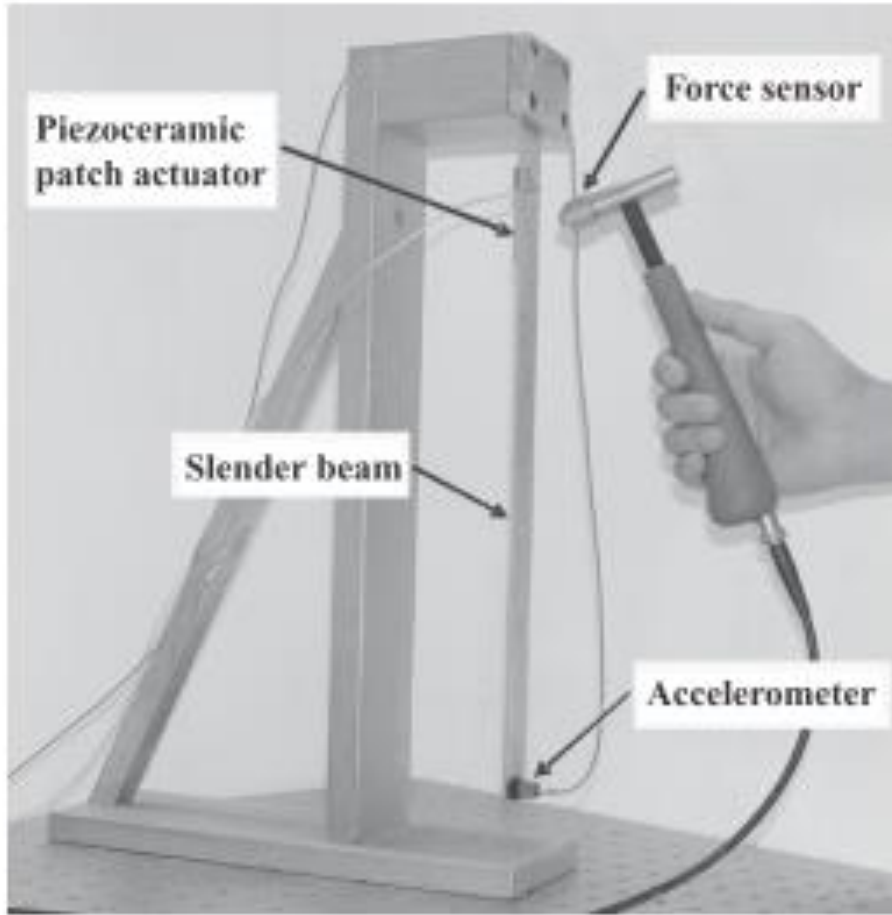


Figure 5: Top view of a decapsulated sensor within SOIC 16 plastic package.

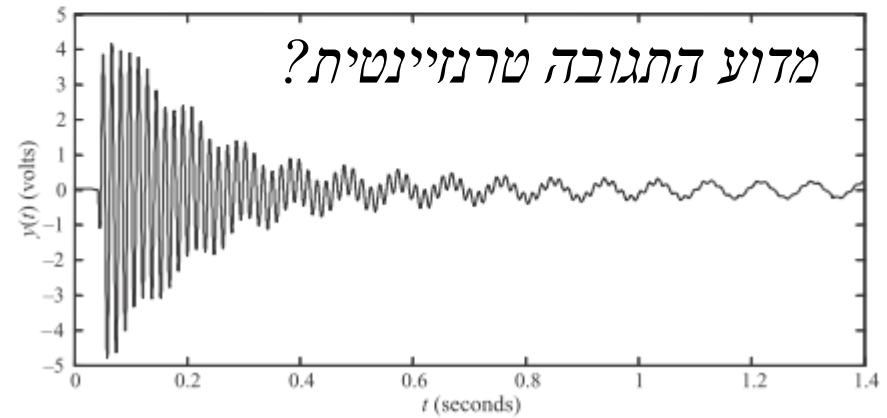


אפיון דינמי של מערכות פיזיקליות לזיהוי כשלים

אפיון קורה ע"י מדידת תאוצה בתגובה להלם



(a) Impact signal measured from the force sensor (impact hammer)



(b) Response signal to the impact measured from the accelerometer

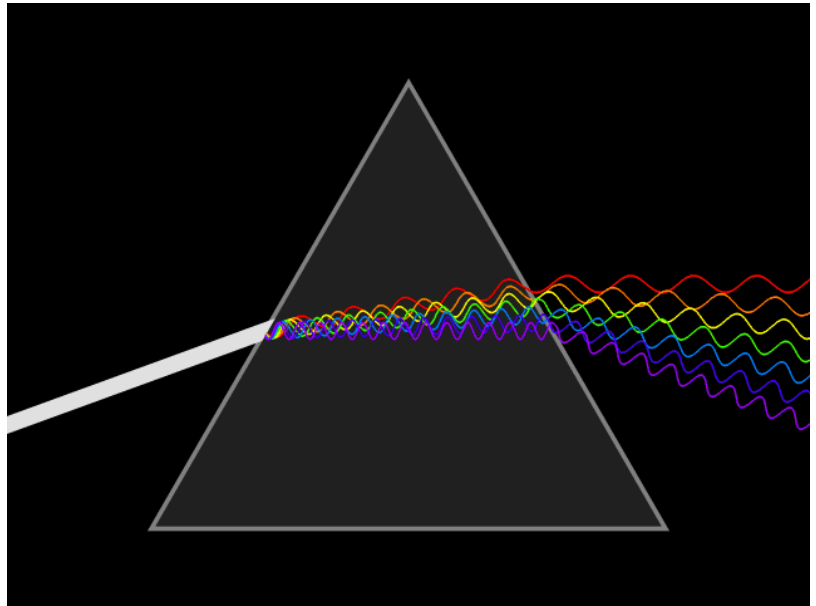


תגובה דינמית לאותות מבחן כלליים

אנליזה ספקטראלית

- תגובת התדירות קובעת את התגובה הדינמית של החיישן (המערכת).
- איך החיישן (המערכת) יגיב לאותות נמדדים בתדירויות שונות?
- אילו תדרים באות הנמדד יופיעו ביציאה של החיישן (המערכת)?
- באיזה מידה האות הנמדד יעוות?

- טורי פורייה (התמרת פורייה):
 - מהו ההרכב הספקטראלי של האות?
 - כלומר: אילו אותות הרמוניים מרכיבים את האות המדוד?





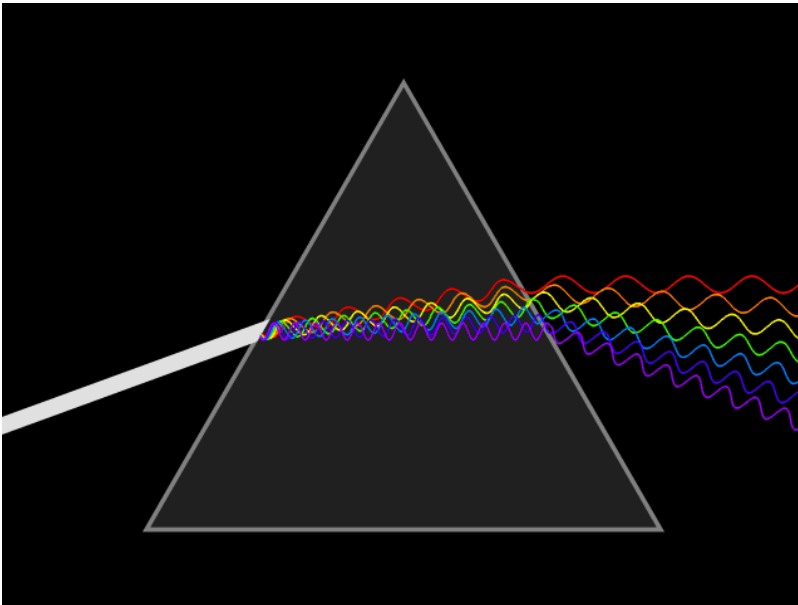
אנליזה ספקטראלית

מוטיבציה

- פירוק אותות לרכיבים הרמוניים בעלי תדירות שונה:

- מהם התדירויות של הרכיבים השונים?

- מה העוצמה של כל רכיב?



- אפשרי למגוון רחב של אותות.
- יעיל לניתוח התגובה של מערכות ליניאריות (תגובת התדירות).



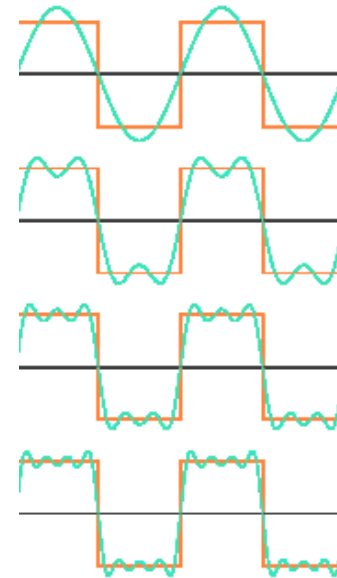
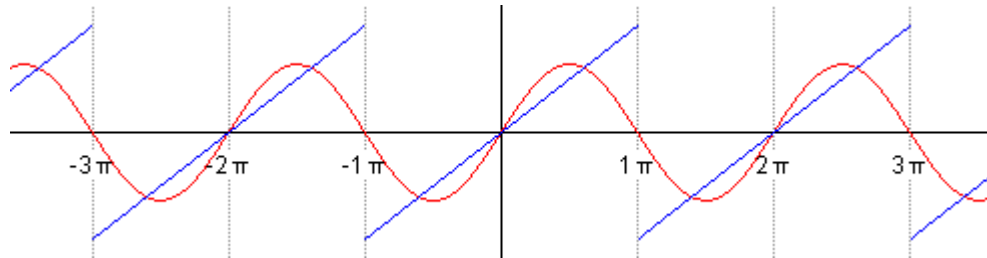
אנליזה ספקטרלית

טורי פורייה

- אות מחזורי $x(t)$ עם תדירות מחזור ω_0 ניתן לייצוג כטור פורייה: סכום של אותות סינוסואידליים

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

דוגמא 2: אות משורר



דוגמא 1:
אות ריבועי

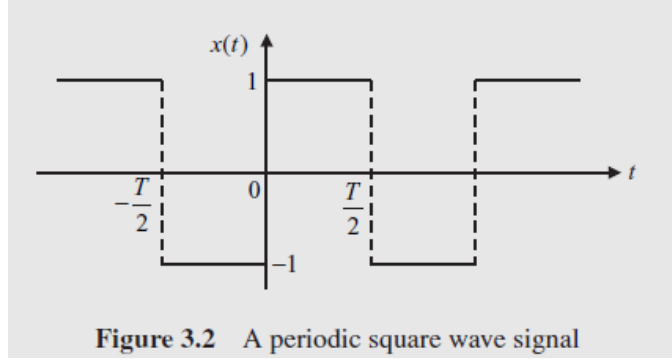
$$x(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(k\omega_0 t)$$

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin((2k-1)\omega_0 t)$$



אנליזה ספקטרלית

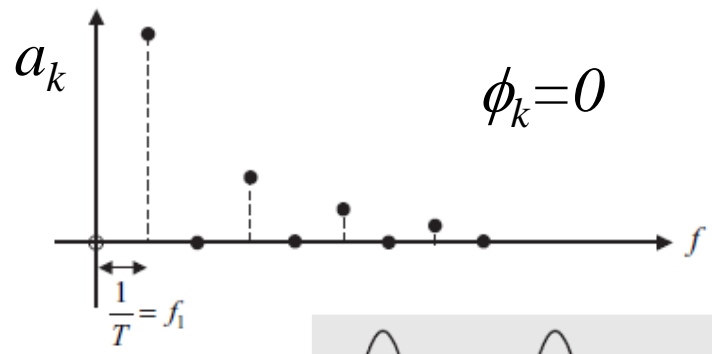
טורי פורייה – אות ריבועי מחזורי



$$x(t) = \begin{cases} -1 & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$x(t + nT) = x(t) \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

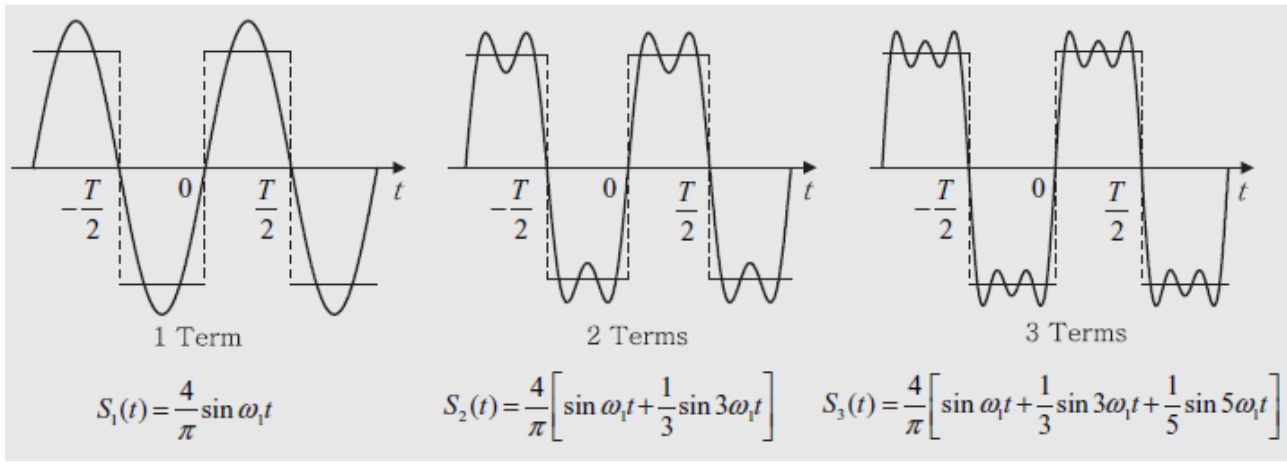
• אות ריבועי מחזורי



• מקדמי פורייה על ציר התדר

• קירובים:

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi / T$$



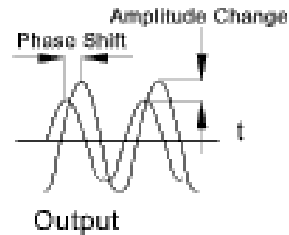
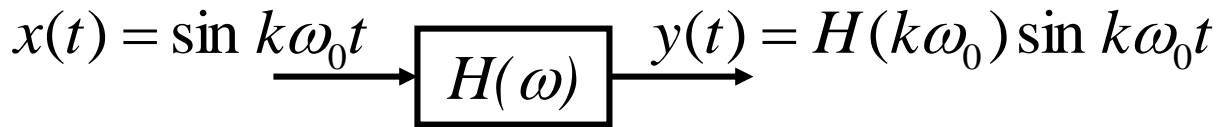
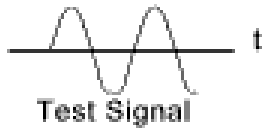


תגובה כללית לאותות מחזוריים

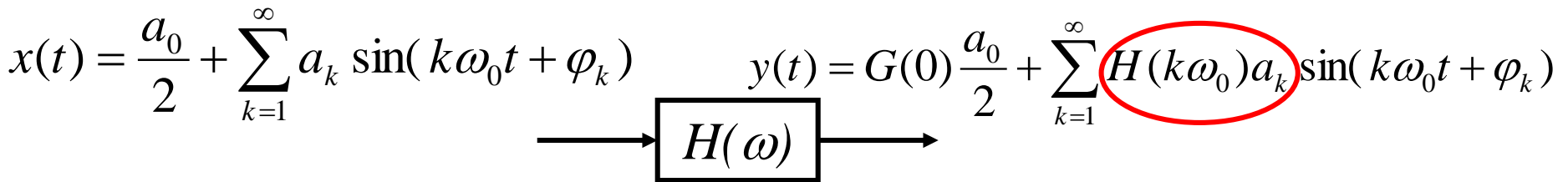
– אות מחזורי $x(t)$ עם תדירות מחזור ω_0 ניתן לייצוג כטור פורייה:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

– תגובת התדירות (לאות סינוסואידאלי)



– מתכונת הסופרפוזיציה של מערכות לינאריות

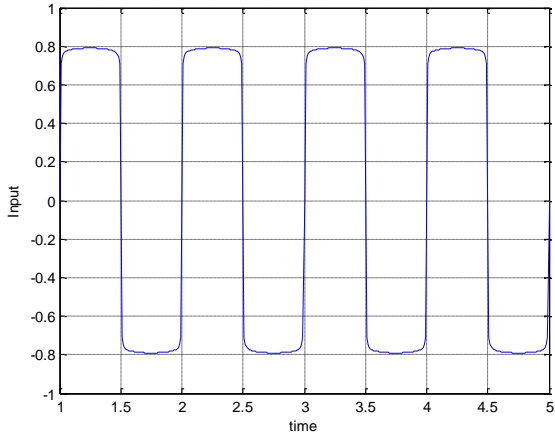


כל רכיב מוכפל בתגובת התדירות בהתאם לתדירות המתאימה



תגובת מערכת LPF ללא תהודה

כניסה של גל ריבועי

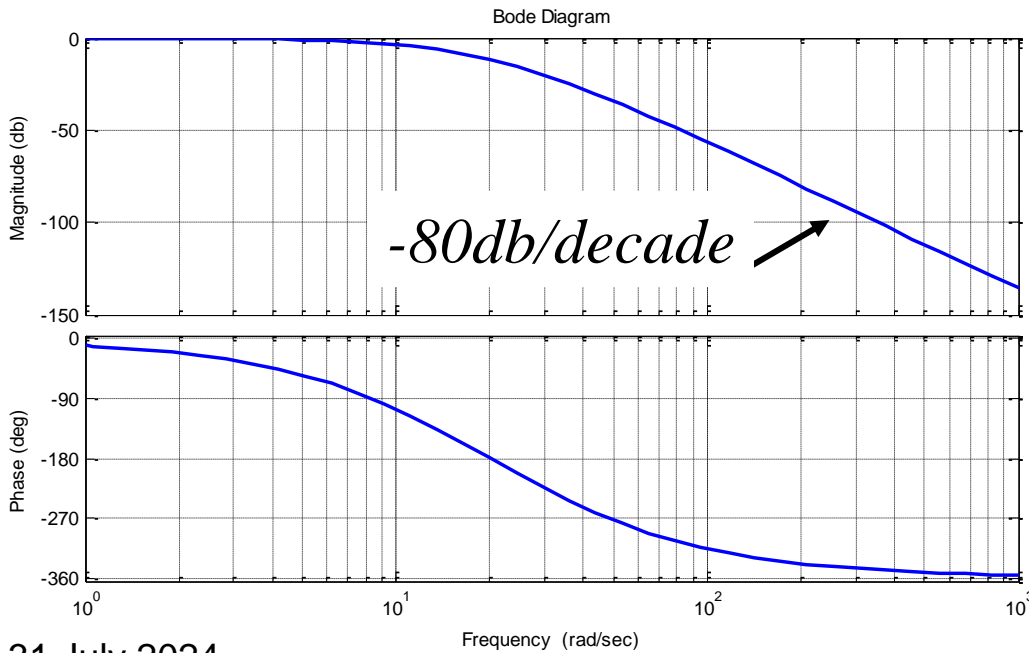


כניסה ריבועית (נוצרה מקירוב של 100 הרכיבים הראשונים בטור פורייה)

עוברת דרך מערכת (מסנן/ חיישן) מסדר רביעי

$$G(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)^4}$$

$$\tau = 0.05 \rightarrow \omega_c = 20 \text{ rad/sec}$$



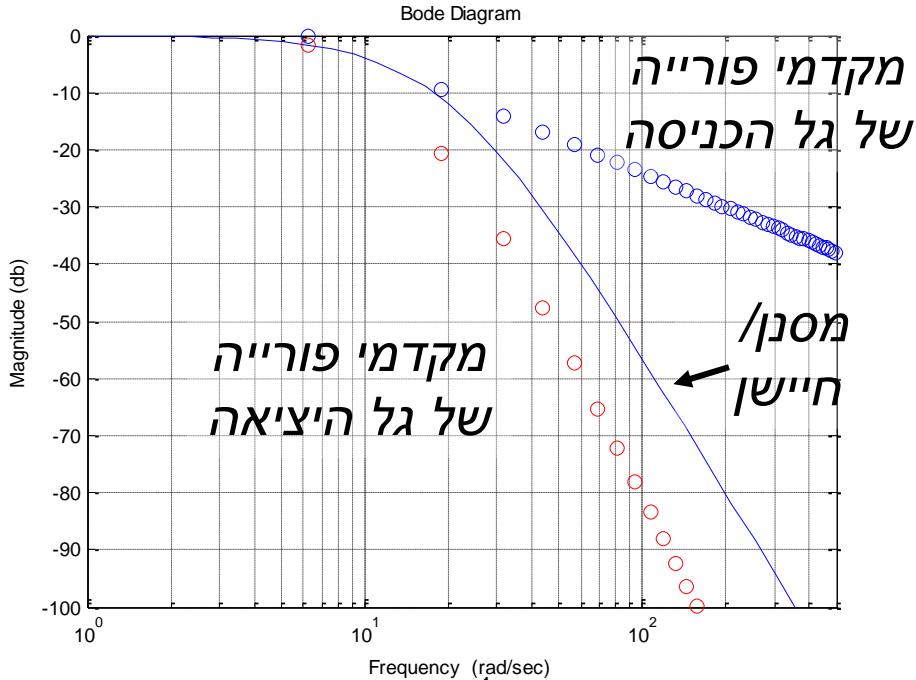
תגובת התדירות

של המערכת:



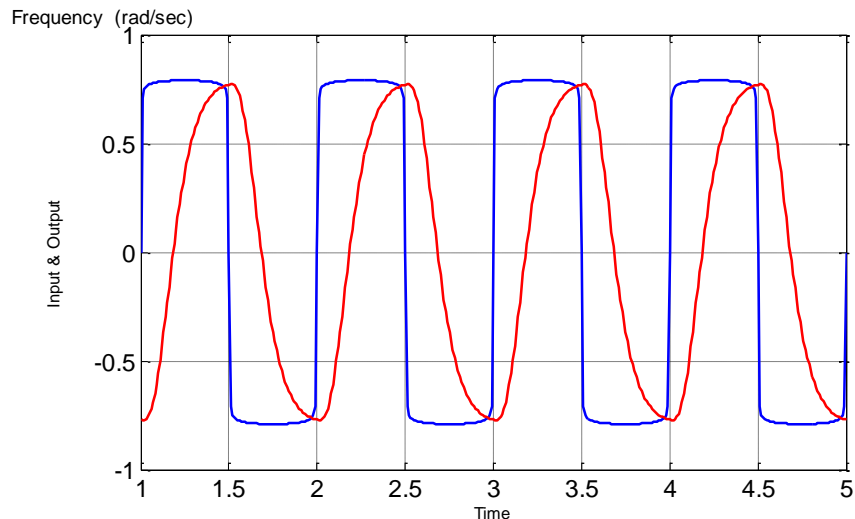
תגובת מערכת LPF ללא תהודה

כניסה של גל ריבועי – המשך



- רכיבי הכניסה בתדרים גבוהים מונחתים יותר

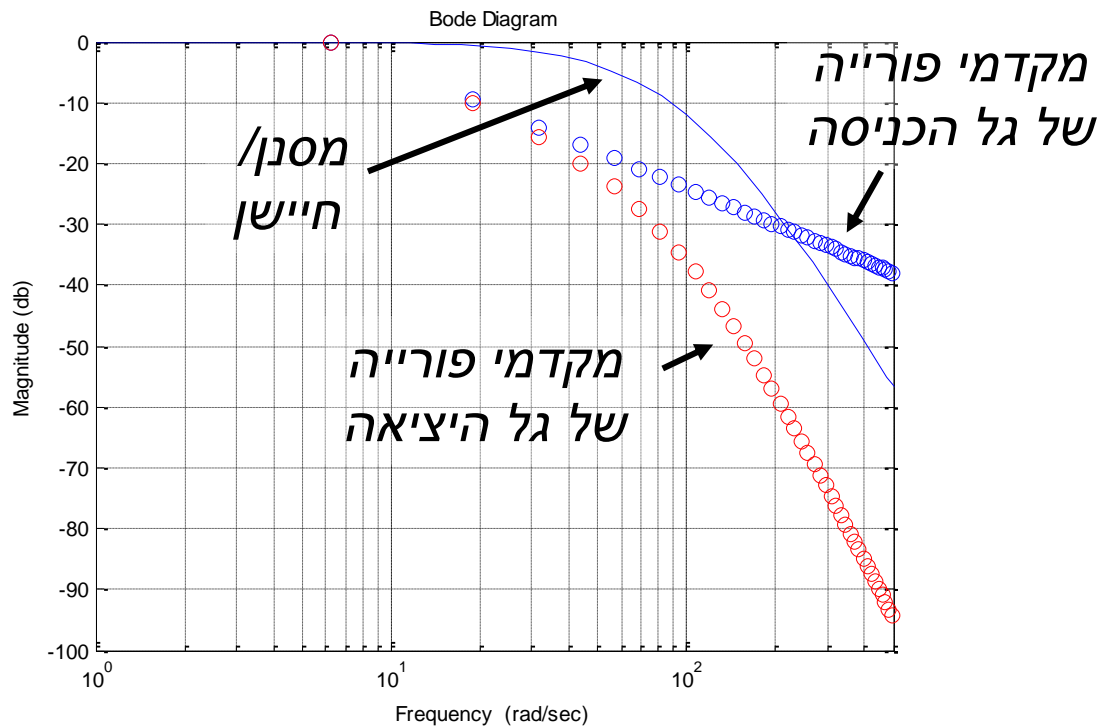
- היציאה אינה עוכבת היטב אחרי הכניסה





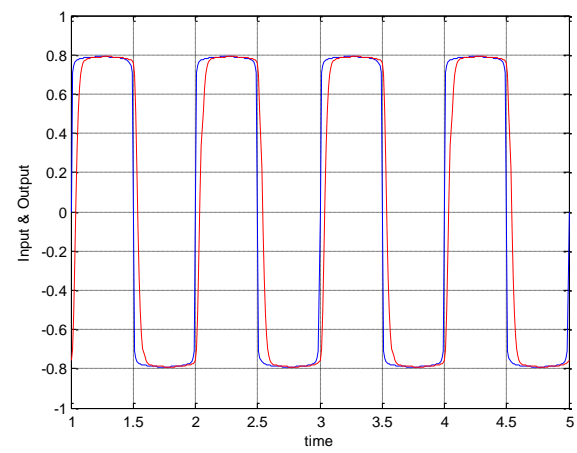
תגובת מערכת LPF ללא תהודה

כניסה של גל ריבועי – המשך



• כאן תדירות הפינה של המערכת גבוהה יותר (100rad/sec) לעומת (20rad/sec) בשקף הקודם

• לכן, היציאה עוכבת יותר טוב (עדיין לא באופן מושלם) אחרי הכניסה





ניטור של מערכת תמסורת

על סמך אנליזה ספקטראלית של מדידות תאוצה

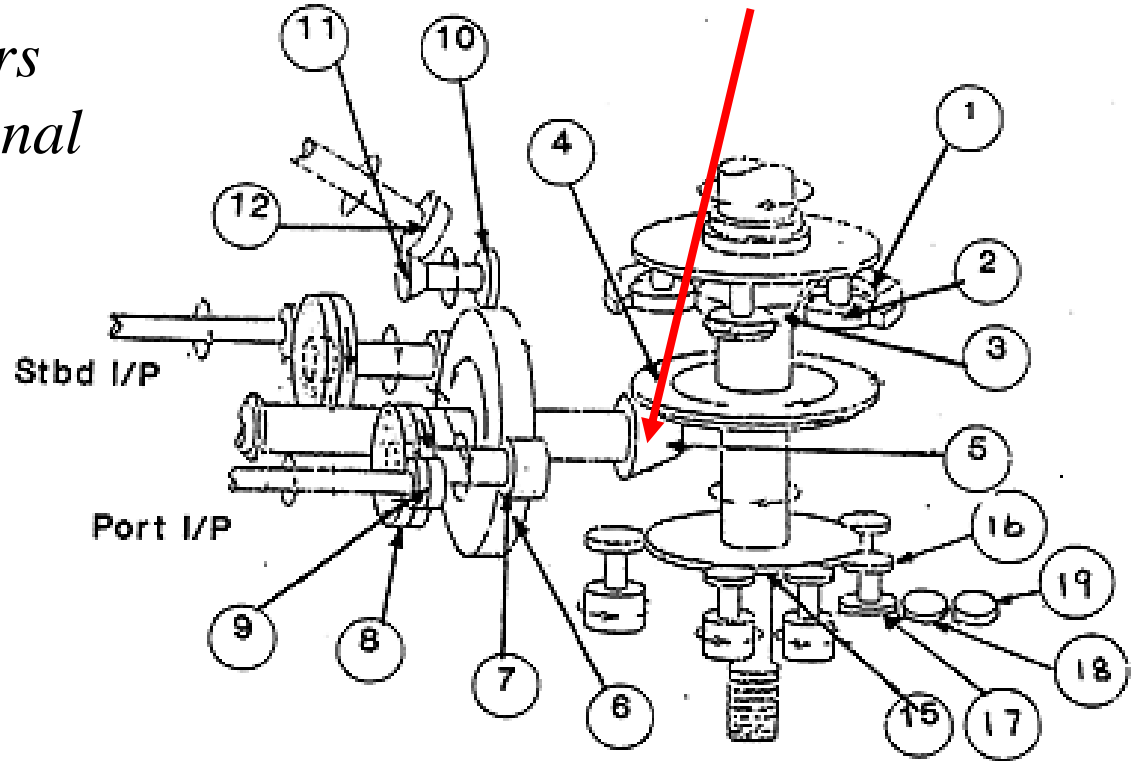
System:

Main power Transmission
of a US Navy CH-46E helicopter

Measurements:

8 accelerometers
Tachometer Signal

Fault #4:
Tooth Spalling
שבבים בשיניים

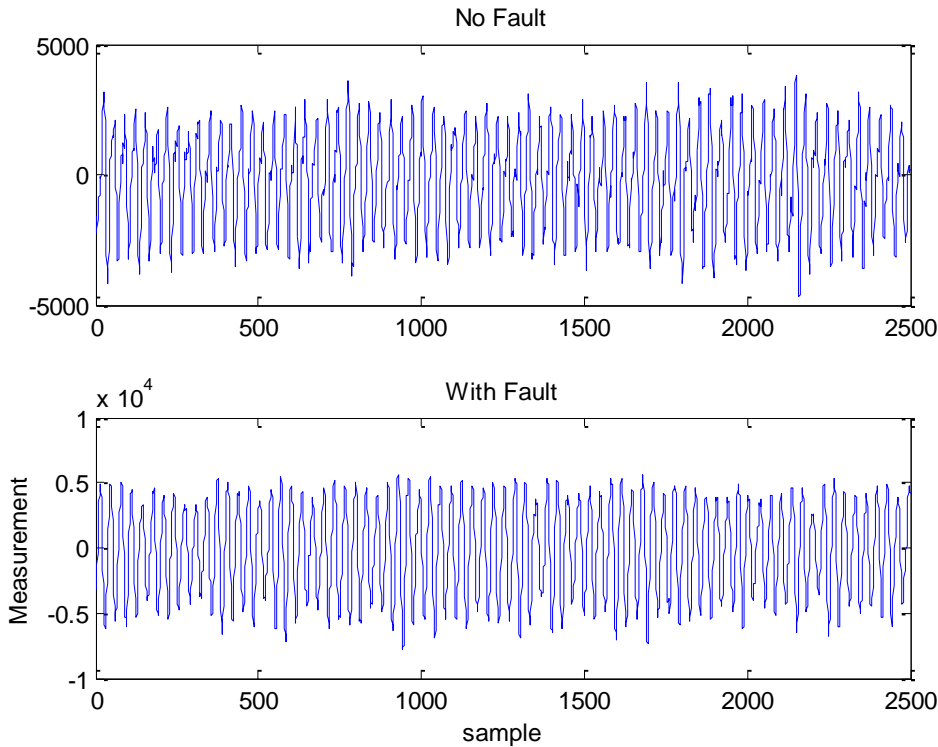




ניטור של מערכת תמסורת

על סמך מדידות תאוצה - המשך

- תאוצות: אותות מחזוריים
- רעידות מחזוריים נוצרים ע"י:

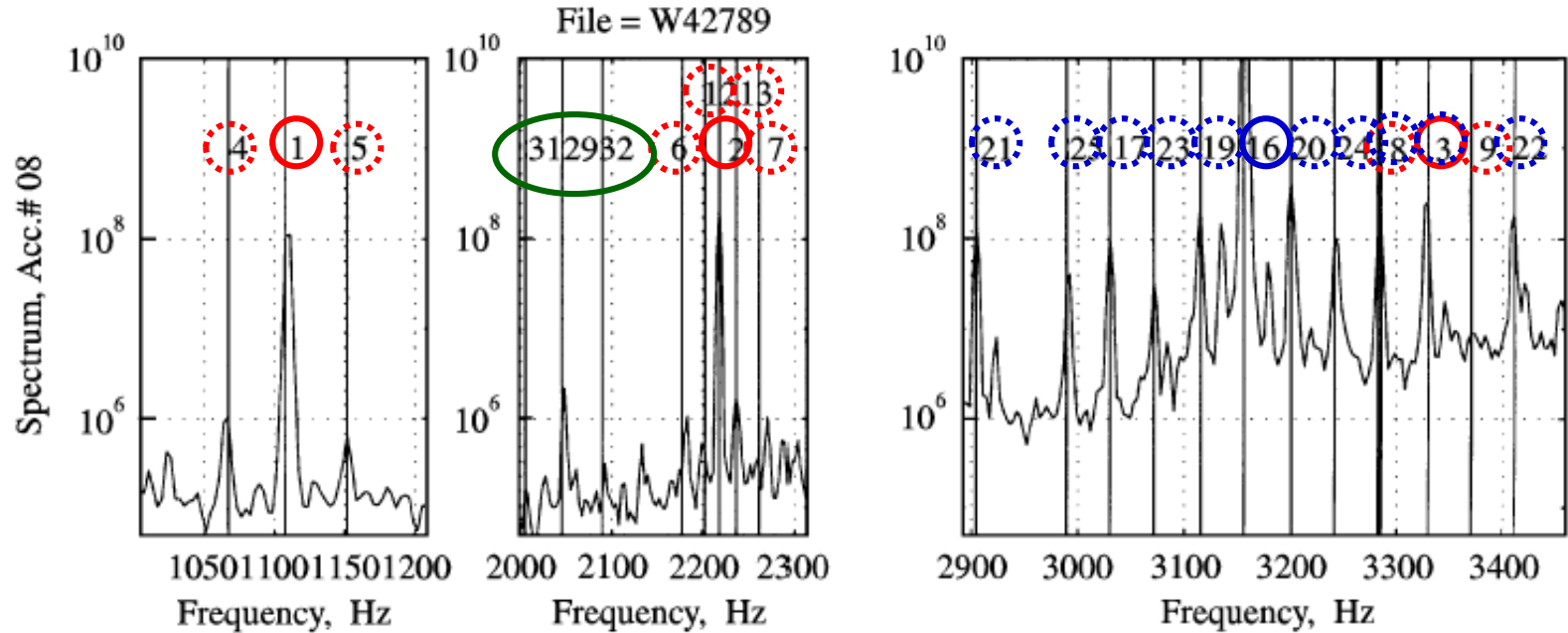


- סיבובי הצירים (בתדירות הסיבוב וכפולותיה)
- שילובי גלגלי השיניים (בתדירות השילוב וכפולותיה)
- מודולציות אמפליטודה ותדר



ניטור של מערכת תמסורת

קווים ספקטראליים אופייניים בהתאם למקור



Vibrations induced by spiral bevel gear tooth meshing (1-15)

Vibrations induced by the collector gear tooth meshing (16-28)

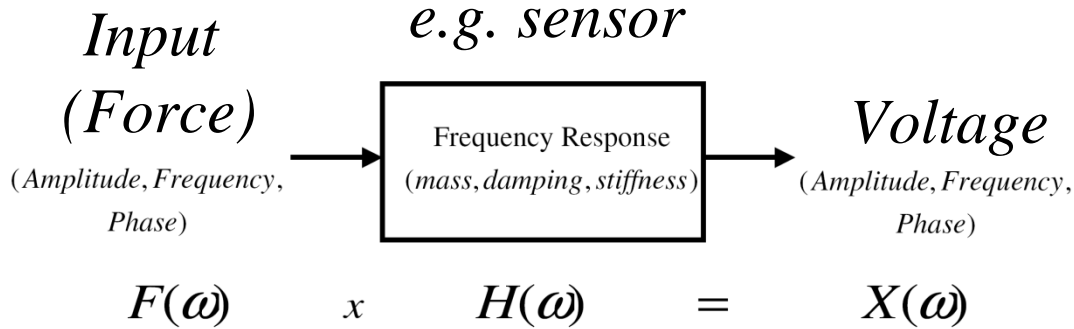
Vibrations induced by cross gear pair interaction (29-32)



תגובת מערכת לכניסה דינמית

המחשה

● המערכת:

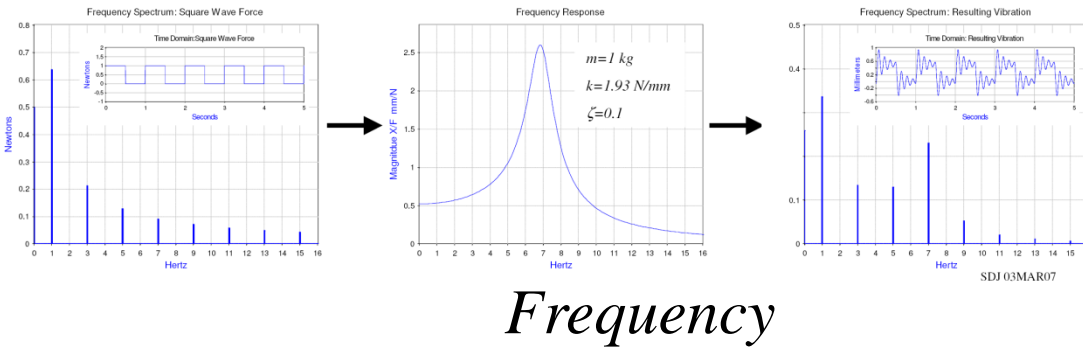


- מערכת חישה
- עיבוד אות אנלוגי
- עיבוד אות דיגיטלי

● במדידה אידיאלית

$$H(\omega) = K \angle 0^\circ$$

- לפחות בתחום
- תדירויות המדידה



הגודל הנמדד מחושב מתוך הידע של תגובת התדירות של מערכת המדידה ומפענח תדרי היציאה ועוצמתם (אנליזה ספקטרלית).



אנליזה ספקטרלית לאותות לא מחזוריים

התמרת פורייה

- אות לא מחזורי ~ אות עם מחזור אין-סופי
- מקדמי פורייה שואפים ל:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cos(\omega t) dt \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \sin(\omega t) dt$$

$$Y(\omega) = A(\omega) - iB(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt \quad \bullet \text{ התמרת פורייה:}$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad \bullet \text{ או כפונקציה של התדירות } f:$$

- האות המקורי ניתן לשחזור ע"י התמרת פורייה ההפוכה:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{i2\pi f t} df$$

אז איך ניתן לעבד את האות בזמן סביר ??
קיימת זיקה לממשק ממוחשב ... סוף



၇၀၀