תרגיל כיתה מס' 7.

מערכת מסדר ראשון - מעביר נמוכים-LPF

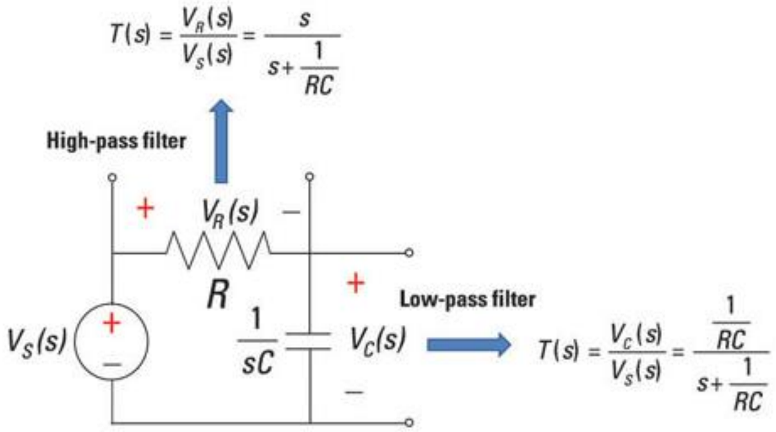
$$H_{LPF,1st}(\omega)=\frac{1}{\tau s+1}$$

מערכת מסדר ראשון - מעביר גבוהים-HPF

$$H_{HPF,1st}(\omega)=\frac{s}{\tau s+1}$$

קבוע הזמן τ קובע את תדירות הפינה של המערכת ω_c (התדירות בה ההגבר הוא $-3dB$) על פי הקשר $\omega_c=\frac{1}{\tau}$.

<u>דוגמא:</u>
מעגל נגד+קבל (RC). קבוע הזמן הוא $\tau=RC$. כאשר המתח נמדד על הקבל זהו LPF, וכאשר המתח נמדד על הנגד זהו HPF.



מערכת מסדר שני - מעביר נמוכים-LPF

- *משוואה דיפרנציאלית:*

$$\ddot{y}+2\xi\omega_n\dot{y}+\omega_n^2 y=\omega_n^2 x$$

- *תגובת תדירות:*

$$H(\omega)=\frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+2j\xi\frac{\omega}{\omega_n}}$$

- *תיאור פולרי:*

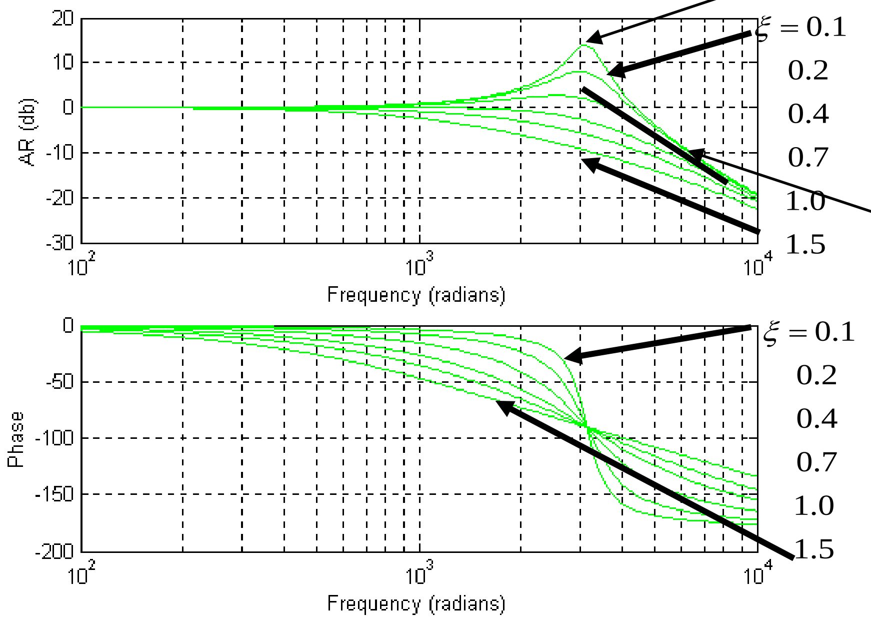
$$|H(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\phi=\angle H(\omega)=-arctg\left[\frac{2\xi\,\omega/\omega_n}{1-\left(\omega/\omega_n\right)^2}\right]$$

$$for\ \xi<0.707$$

$$H_{\max}=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

תגובת התדירות – עבור מקדמי ריסון שונים



at resonance freq

$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$$

-40db/decade

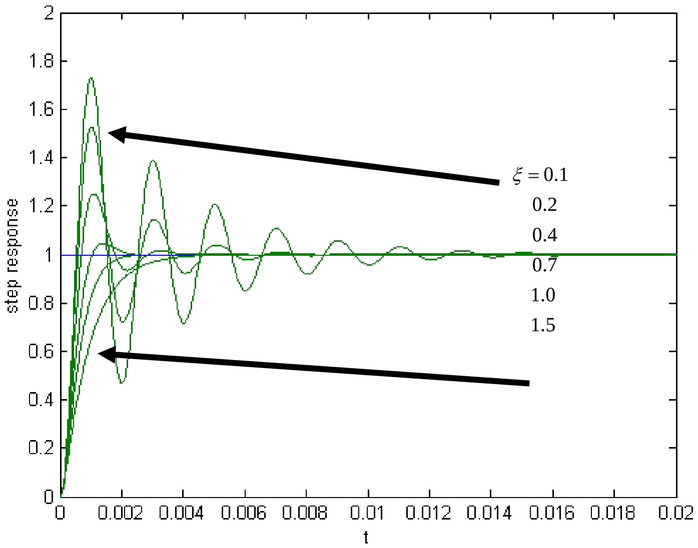
שגיאה דינמית:

$$1-|H(\omega)|$$

מהירות תגובה:
מאופיינת ע"י פיגור פזה

שגיאה דינמית מוגדרת על ידי $e_{dyn}=1-\left|H\left(\omega\right)\right|$ והיא מתארת את הסטייה של המערכת מהגבר יחידה בתדרים שונים כתוצאה מרזוננס או הנחתה.

תגובת מדרגה – עבור מקדמי ריסון ξ שונים



תגובת מדרגה:

על ריסון : $\xi > 1$

ניתן לפרק לשתי מע׳ מסדר 1

ריסון קריטי : $\xi = 1$

$$s(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t}(1 + \omega_n t)$$

תת-ריסון : $\xi < 1$

$$s(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t + \phi)$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\phi = \arcsin(\omega_d / \omega_n)$$

שגיאה דינמית : אין, המערכת מתכנסת לערך קבוע.

(יש Overshoot במערכת תת מרוסנת)

זמני עליה והתכנסות:

זמן עליה (rise time) מוגדר כזמן שתגובת המדרגה שוהה בין 10% ל90% מהערך הסופי.

זמן התכנסות (settling time) הזמן הדרוש לתנודות להיות בתחום הקטן ב-P% מהערך הסופי.

<u>סדר ראשון –</u>

$$t_r \cong 2.2\tau$$

<u>סדר שני (למערת תת מרוסנת בלבד) -</u>

$$t_r \cong \frac{1.12 - 0.078\xi + 2.23\xi^2}{\omega_n}$$

$$t_s(P\%) \cong \frac{-\ln(P/100)}{\xi\omega_n}$$

$$\rightarrow t_s(5; 2; 1\%) \cong \frac{3;\ 4;\ 4.6}{\xi\omega_n}$$

תרגיל מס. 1.

נתונים שני חיישנים בעלי אותו הגבר סטטי. חיישן אחד הוא בעל תגובת תדירות כמו מערכת מסדר ראשון והחיישן השני בעל תגובת תדירות כמו מערכת מסדר שני.

א. עבור איזה מנת ריסון(ζ) ההגבר של החיישן הראשון בתדירות הפינה שווה להגבר של החיישן השני בתדירות הטבעית?

ב. האם תהיינה תנודות בתגובת המדרגה של החיישן השני? האם יהיה רזוננס בתדירות הטבעית?

ג. נתון $\tau = 0.2\ sec$, $\omega_n = 1\frac{rad}{sec}$. מצאו את זמן העלייה של שני החיישנים, ואת זמן הרגיעה (Settling time) ל 5% מהערך הסופי.

תרגיל מס. 1 - פתרון.

א.

פונקציות תמסורת של החיישנים נתונות ע"י :

$$H_{II} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\cdot\omega_n\cdot s + \omega_n^2} \qquad H_I = \frac{K}{\tau s + 1}$$

בהצבת $j\omega$:

$$H_{II} = \frac{K\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\cdot\omega_n\cdot(j\omega) + \omega_n^2} \qquad H_I(j\omega) = \frac{K}{\tau j\omega + 1}$$

אזי ההגבר יהיה :

$$|H_I(j\omega)| = \left|\frac{K}{\tau j\omega + 1}\right| = \frac{K}{\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}}$$

$$|H_{II}(j\omega)| = \left|\frac{K\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \omega^2) + 2\zeta\omega_n j\omega}\right| = \frac{K\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

נמצא את ההגבר של כל חיישן בתדירות הפינה/טבעית :

מערכת מסדר II : $\omega = \omega_n$ *מערכת מסדר* I : $\omega = \frac{1}{\tau}$

מציבים :

$$|H_{II}(\omega = \omega_n)| = \frac{K}{2\zeta} \qquad \left|H_I\left(\omega = 1/\tau\right)\right| = \frac{K}{\sqrt{2}}$$

משווים :

$$\frac{K}{\sqrt{2}} = \frac{K}{2\zeta} \quad \Rightarrow \quad \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$$

ב.

$\zeta < 1$ לכן המערכת תת מרוסנת ויהיו תנודות.

מכיוון שהריסון הוא בערך הקריטי עבור תדר רזוננס – לא יהיה רזוננס.

ג.

מערכת מסדר ראשון :

$$t_r \cong 2.2\tau \text{ (from 10\%-90\%)}$$

$$t_s = -\tau \ln 0.05 \quad for\ 5\%$$

כך ש-

$$t_r \cong 0.44\ sec, \qquad t_s \cong 0.599\ sec$$

מערכת מסדר שני:

עבור מערכת תת מרוסנת –

$$t_r \cong \frac{1.12 - 0.0786\zeta + 2.23\zeta^2}{\omega_n} = 2.17\ sec$$

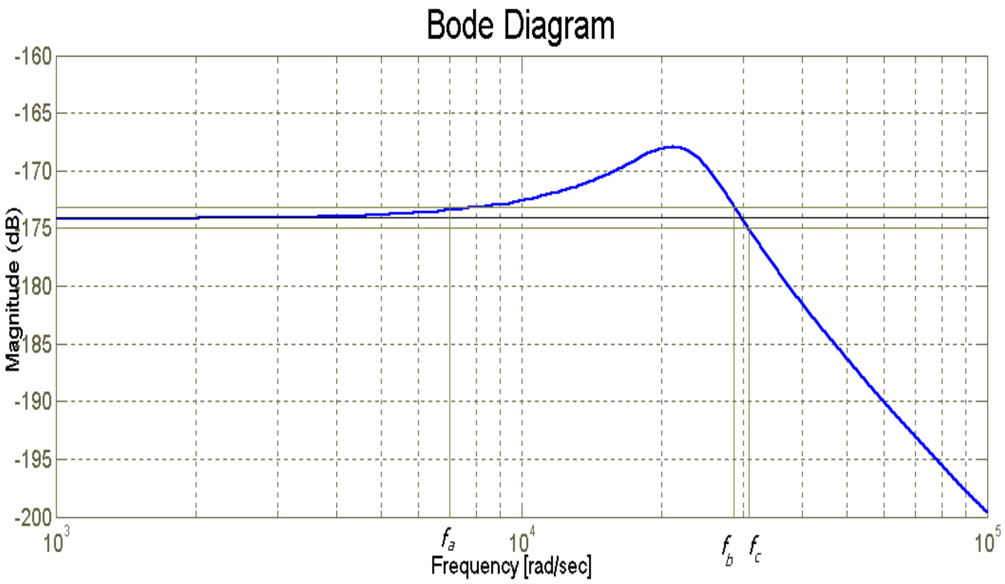
$$t_{s_{5\%}} \cong \frac{3}{\zeta\omega_n} = 4.24\ sec$$

תרגיל מס. 2

נתון חיישן כח המתנהג כמערכת מסדר II בעל תדירות טבעית $f_n = 3600[Hz]$ ומנת הריסון $\zeta = 0.25$. מהי התדירות המקסימלית כך שהשגיאה הדינמית של החיישן תהיה עדיין קטנה מ- 6% ?

תרגיל מס. 2 – פתרון

פונקצית התמסורת של החיישן נתונה ע״י-



$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n = 2\pi f_n = 2\pi \cdot 3600 = 7200\pi[rad]$$
$$\zeta = 0.25$$

הגרף הנ״ל חותך את התחום בשני מקומות אך אותנו מעניין רק התחום השמאלי $(\omega < \omega_a)$

$$H(j\omega) = \frac{K\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2(j\omega)\omega_n\zeta + \omega_n^2}$$

נציב $\omega = \omega_a$ בתור תדר נעלם שבו הבודה של המערכת חותך את הקו 1.06K .

$$H(j\omega_a) = \frac{K\omega_n^2}{(j\omega_a)^2 + 2(j\omega_a)\omega_n\zeta + \omega_n^2} = \frac{K\omega_n^2}{-\omega_a^2 + \omega_n^2 + 2j\zeta\omega_n\omega_a}$$

$$\left|H(j\omega_a)\right| = \frac{K\omega_n^2}{\sqrt{\left(\omega_n^2 - \omega_a^2\right)^2 + \left(2\zeta\omega_n\omega_a\right)^2}} = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_a}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega_a}{\omega_n}\right)^2}} \le 1.06 \cdot K$$

נגדיר: $q \equiv \left(\dfrac{\omega_a}{\omega_n}\right)^2$

נקבל (לאחר ההצבה):

$$\frac{1}{1.06} \le \sqrt{(1-q)^2 + 0.25q}$$

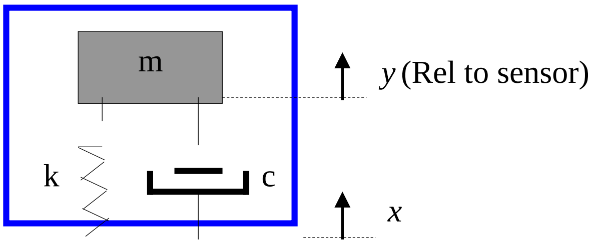
$$0.89 \le 1 - 1.75q + q^2$$
$$0 \le q^2 - 1.75q + 0.11$$
$$q_1 = 0.065 \quad \Rightarrow \quad \omega_a = 0.255\omega_n$$
$$q_2 = 1.685 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\omega_a = 1.298\omega_n}_{\text{נפסל}}$$

מכאן ש:

$$\omega_a = 0.255\omega_n = 5767\left[\frac{rad}{\sec}\right]$$

תרגיל מס. 3

נתון חיישן סיסמי לפי הציור הבא:



מתח המוצא של החיישן הינו: $V_o = Sy$
והרגישות היא: $S_o = 100[mV/cm]$

א) כתובי את משוואות התנועה של החיישן, עבור מדידת תזוזה (ולא תאוצה), כאשר $f_n = 12[Hz]$ ו- $\zeta = 0.5$
ב) מהי השגיאה הדינמית בתדר $f = 8\ [Hz]$

תרגיל מס. 3- פתרון

א)

$$m(\ddot{y} + \ddot{x}) = -c\dot{y} - ky$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{x}$$

עבור כניסת תזוזה X:

$$ms^2Y + csY + kY = -ms^2X$$
$$G(s) = \frac{Y}{X} = \frac{-ms^2}{ms^2 + cs + k} = \frac{-s^2}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}}$$

פרמטרים של מערכת מסדר II

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \qquad \frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n$$

לכן:

$$G(s) = \frac{Y}{X} = \frac{-s^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \Rightarrow$$

$$H(s) = \frac{V_o}{X} = S \cdot \frac{-s^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$H(j\omega) = S \cdot \frac{-(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2} = S \cdot \frac{\omega^2}{-\omega^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2}$$

ניתן לראות שקיבלנו מערכת HPF. מסקנה, לא ניתן למדוד תזוזות סטטיות!

ב) נמצא את הגבר פונקציית התמסורת בתדר הדרוש:

$$\left|H(j\omega)\right| = S \cdot \left|\frac{\omega^2}{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right) + 2\zeta\omega_n j\omega}\right| = S \cdot \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\zeta\omega_n\omega\right)^2}}$$

$$\omega_n = 2\pi \cdot f_n = 24\pi[rad/s] \qquad \omega = 2\pi \cdot f = 16\pi[rad/s]$$

$$\left|H(j\omega)\right| = \left|\frac{V_o}{X}\right| = S \cdot \frac{\left(16\pi\right)^2}{\sqrt{\left[\left(24\pi\right)^2 - \left(16\pi\right)^2\right]^2 + \left(2 \cdot 0.5 \cdot 24\pi \cdot 16\pi\right)^2}} = S\frac{2526.62}{\sqrt{9.97 \cdot 10^6 + 1.43 \cdot 10^7}} = 0.51S$$

אם כן ערך השגיאה הדינמית הוא:

$$e_{dyn} = 1 - \frac{1}{S}\left|\frac{V_o}{X}\right| = 1 - 0.51 = 49\left[\%reading\right]$$

תרגיל מס' 4.

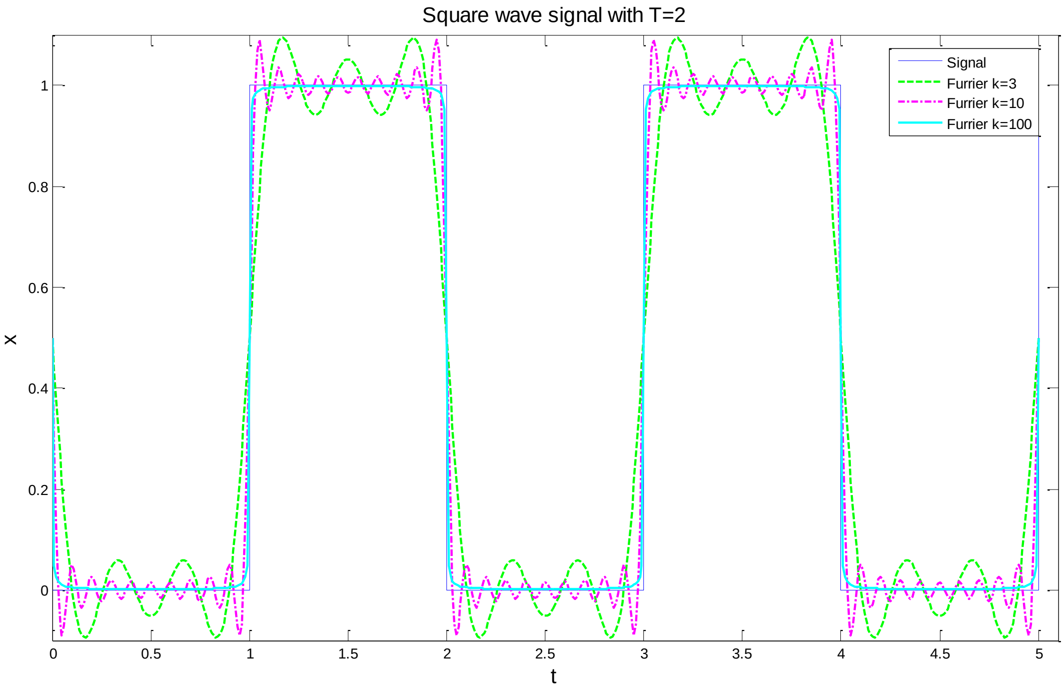
נדרש למדוד אות כניסה המתנהג כגל ריבועי בעל זמן מחזור $T = 2\left[sec\right]$. המדידה היא באמצעות חיישן המתנהג כמערכת מסדר ראשון (LPF) עם קבוע זמן $\tau = 0.1\left[\sec\right]$.

א. קרב את האות הריבועי לטור פורייה.
ב. כמה איברים מהטור יעברו ביציאה מהחיישן עם הנחתה שאינה עוברת את ה90%.
ג. מוצע לבצע קירוב לאות היציאה מהחיישן עם מספר האיברים שמצאנו בסעיף ב'. ועם המקדמים שנמצאו בסעיף א'. האם נקבל התאמה? הסבר.

תרגיל מס' 4 – פיתרון.

א. קירוב לטור פורייה:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\left(\left(2k-1\right)\omega t\right) \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$



התדרים המופיעים בספקטרום האות עבור $T=2[\sec]$:

$$\omega_k=(2k-1)\omega \quad , \quad \omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$$
$$\omega_1=\pi \ , \ \omega_2=3\pi \ , \ \omega_3=5\pi \ , \ \ldots$$

ב.
נמצא את התדר להנחתה של 90% עבור מערכת סדר ראשון עם קבוע זמן τ.

הנחתה של 90% מתרחשת כאשר ההגבר הוא 0.1 –

$$\left|H(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}=0.1$$
$$\rightarrow \frac{1}{1+(0.1)^2\omega^2}=0.1^2 \rightarrow \omega=99.4987\left[\frac{rad}{\sec}\right]$$

נמצא את האיבר המתאים בטור פורייה -

$$(2k-1)\pi=99.4987 \rightarrow 2k\pi=99.4987+\pi \rightarrow k=\frac{99.4987+\pi}{2\pi}\approx 16.33>16$$

כלומר, כל התדרים בטור פורייה עבור $k>16$ יונחתו ביותר מ90%.

ג.
לא נקבל התאמה, כי גם האיברים בסדרים הנמוכים יותר מונחתים ויש לקחת זאת בחשבון בחישוב הקירוב על ידי הקשר הבא –

$$x(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|H\left((2k-1)\pi\right)\right|}{2k-1}\sin\left((2k-1)\pi t+\measuredangle H\left((2k-1)\pi\right)\right)$$

ניתן לראות את הקירוב של 16 איברים עם וללא ההנחתה בגרף הבא: