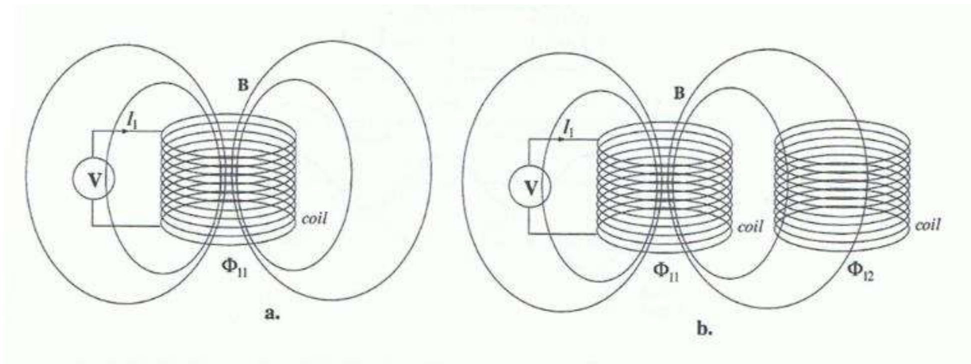
תרגול 7- חיישנים השראותיים

השראות הדדית –תזכורת

עבור סלילים צמודים, השטף המגנטי הנוצר על ידי הזרם בסליל אחד, עובר בחלקו גם דרך הסלילים האחרים ומשרה בהם מתח.



נזרים זרם I_1 בסליל השמאלי. כתוצאה מכך נוצר שטף מגנטי שחלקו עובר לסליל הימני. אם השטף משתנה בזמן (הזרם הוא זרם חילופין) ייווצר בסליל הימני מתח לפי חוק לנץ $V = \frac{d\phi}{dt}$.

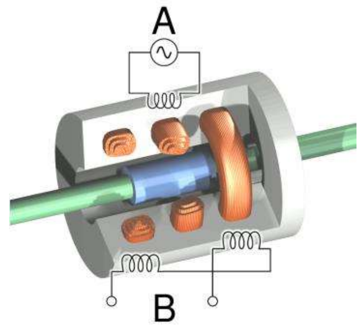
באופן כללי המתח הנוצר בסליל הימני ניתן לתיאור באופן הבא :

$$V_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$$

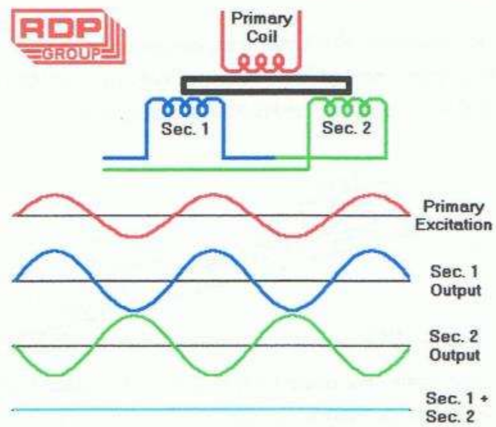
כאשר M נקראת ההשראות ההדדית בין הסלילים. ההשראות ההדדית תלויה במימדים הגאומטריים של הסליל, קבוע הפרמאביליות ומספר ליפופים של שני הסלילים.

LVDT – Linear Variable Differential Trasformer

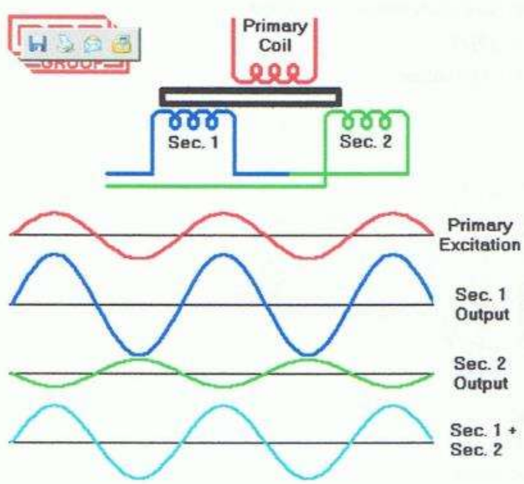
חיישן מגנטי הבנוי מליבה מגנטית הנעה באופן ליניארי בין 3 סלילים:

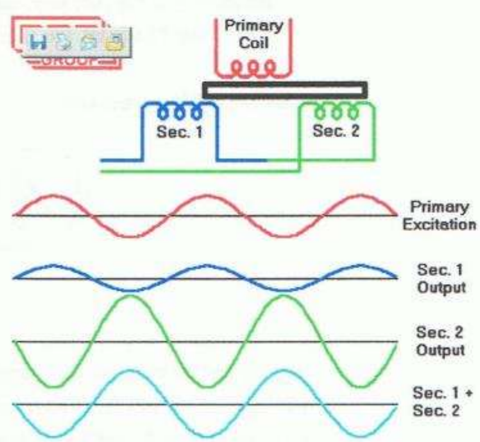


כאשר הליבה נמצאת בדיוק במרכז המתח המושרה שווה ומתח היציאה שווה לאפס:

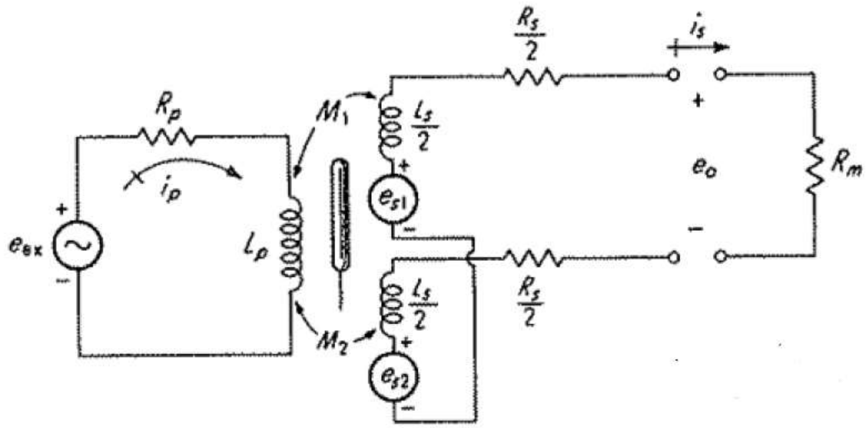


כאשר הליבה מתקרבת לאחד הסלילים מתח היציאה עולה, כך ניתן לקשר תזוזה למתח המתקבל.
ואילו הכיוון מתקבל ע"י הפאזה של אות היציאה.





LVDT – מעגל חשמלי



מעגל ראשוני:

$$e_{\text{ex}} - (M_1 - M_2)\cdot\frac{di_s}{dt} = i_p R_p + L_p\frac{di_p}{dt}$$

מעגל משני:

$$(M_1 - M_2)\cdot\frac{di_p}{dt} = i_s(R_s + R_m) + L_s\frac{di_s}{dt}$$

מתח היציאה:

$$e_{\text{out}} = i_s R_m$$

נבצע התמרת לפלס:

$$\begin{cases} E_{\text{ex}} - (M_1 - M_2)\cdot i_s s = i_p R_p + L_p i_p s \\ (M_1 - M_2)\cdot i_p s = i_s(R_s + R_m) + L_s i_s s \end{cases}$$

נבודד את i_p מהמשוואה הראשונה:

$$\begin{cases} i_p = \dfrac{E_{\text{ex}} - (M_1 - M_2)\cdot i_s s}{R_p + L_p s} \\ (M_1 - M_2)\cdot i_p s = i_s(R_s + R_m) + L_s i_s s \end{cases}$$

נציב במשוואה השנייה:

$$(M_1 - M_2)s\cdot\frac{E_{\text{ex}} - (M_1 - M_2)\cdot i_s s}{R_p + L_p s} = i_s(R_s + R_m) + L_s i_s s$$

$$\frac{(M_1 - M_2)s}{R_p + L_p s}\cdot E_{\text{ex}} - \frac{(M_1 - M_2)^2 s^2\cdot i_s}{R_p + L_p s} = i_s(R_s + R_m) + L_s i_s s$$

$$\frac{(M_1 - M_2)s}{R_p + L_p s}\cdot E_{\text{ex}} = \left[(R_s + R_m) + L_s s + \frac{(M_1 - M_2)^2 s^2}{R_p + L_p s}\right] i_s$$

הקשר בין מתח היציאה לזרם i_s : $E_{\text{out}} = i_s R_m \;\Rightarrow\; i_s = \dfrac{E_{out}}{R_m}$

$$\frac{(M_1-M_2)s}{R_p+L_p s}\cdot E_{\text{ex}}=\left[(R_s+R_m)+L_s s+\frac{(M_1-M_2)^2 s^2}{R_p+L_p s}\right]\frac{E_{\text{out}}}{R_m}$$

$$\frac{(M_1-M_2)s}{R_p+L_p s}R_m\cdot E_{\text{ex}}=\left[(R_s+R_m)+L_s s+\frac{(M_1-M_2)^2 s^2}{R_p+L_p s}\right]E_{\text{out}}$$

$$\frac{E_{\text{out}}}{E_{\text{ex}}}=\frac{\frac{(M_1-M_2)s}{R_p+L_p s}R_m}{(R_s+R_m)+L_s s+\frac{(M_1-M_2)^2 s^2}{R_p+L_p s}}=\frac{\frac{(M_1-M_2)s}{(R_s+R_m)(R_p+L_p s)}R_m}{1+\frac{L_s}{(R_s+R_m)}s+\frac{(M_1-M_2)^2}{(R_s+R_m)(R_p+L_p s)}s^2}=$$

$$=\frac{\frac{(M_1-M_2)s}{(R_s+R_m)}R_m}{\left(1+\frac{L_s}{(R_s+R_m)}s\right)(R_p+L_p s)+\frac{(M_1-M_2)^2}{(R_s+R_m)}s^2}$$

נגדיר:

$$\tau_s=\frac{L_s}{R_s+R_m}$$

$$\tau_M=\frac{M_1-M_2}{\sqrt{R_p(R_s+R_m)}}$$

$$\tau_p=\frac{L_p}{R_p}$$

ונקבל:

$$\frac{E_{\text{out}}}{E_{\text{ex}}}=\frac{\frac{(M_1-M_2)s}{(R_s+R_m)}R_m}{(1+\tau_s s)(R_p+L_p s)+\frac{(M_1-M_2)^2}{(R_s+R_m)}s^2}\cdot\frac{\frac{1}{R_p}}{\frac{1}{R_p}}=\frac{\frac{(M_1-M_2)s}{(R_s+R_m)R_p}R_m}{(1+\tau_s s)(1+\tau_p s)+\tau_M{}^2 s^2}=$$

$$=\frac{(M_1-M_2)}{(R_s+R_m)R_p}R_m\frac{s}{(1+\tau_s s)(1+\tau_p s)+\tau_M{}^2 s^2}$$

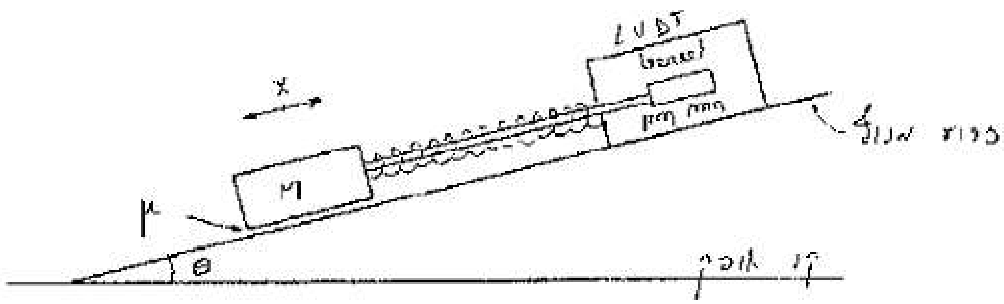
קירוב עבור $\tau_M<<\sqrt{\tau_p\tau_s}$

$$\frac{E_{\text{out}}}{E_{\text{ex}}}=\frac{(M_1-M_2)}{(R_s+R_m)R_p}R_m\frac{s}{(1+\tau_s s)(1+\tau_p s)}$$

הערה: הקשר לתזוזה x מגולם בהשראות ההדדית $M_i=f(x,...)$.

<u>שאלה 1</u>

א) על מנת למדוד את זווית ההגבהה של זרוע מנוף הרמה, משתמשים במכשיר LVDT המחובר לזרוע המנוף. לציר ה-LVDT מחוברת מסה M המחליקה לאורך הזרוע עם מקדם חיכוך μ. בין המסה M לקופסת ה-LVDT מותקן קפיץ K כמתואר בציור.



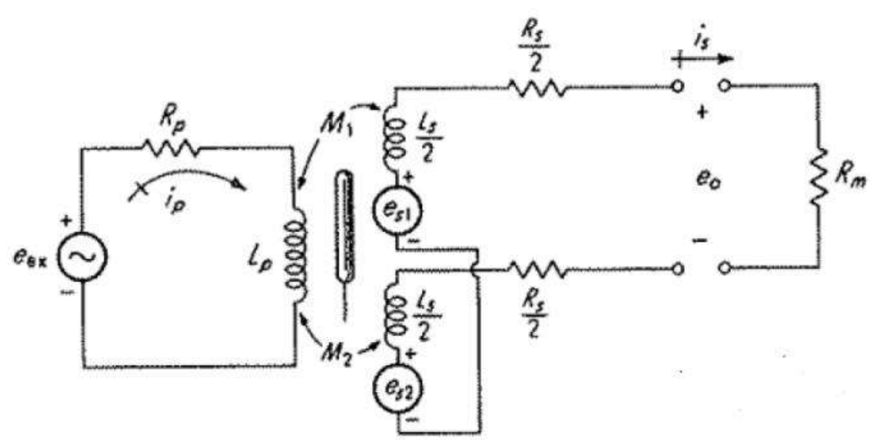
1) כתוב את הקשר בין x (מיקום ציר ה-LVDT יחסית למרכזו) לבין θ (זווית ההגבהה של מנוף ההרמה). איך μ משפיע על קשר זה?

2) הניחו $\mu = 0$. נתון כי בהשפעת הרוח זווית מנוף ההרמה מתנהגת לפי הקשר -

$$\theta(t) = \theta_0 + 0.05\theta_0 \sin \omega t$$

כאשר θ_0 היא זווית ההגבהה הנומינלית. כתוב את המשוואה הדיפרנציאלית המקשרת בין x ל- θ ופתור אותה בעזרת קירוב עבור זוויות קטנות $\theta_0 << 1$.

ב) סכמת ה- LVDT נתונה בציור:



למעגל מקור מתח חילופין בתדר ω_S ואמפליטודה E_{ex}

$L_p; R_p$ - ההתנגדות הכוללת וההשראות של המעגל הראשון

$\frac{L_s}{2}; \frac{R_s}{2}$ - ההתנגדות וההשראות של על אחד מליפופי המעגל השני

$M_1; M_2$ - השראויות הדדיות בין המעגל הראשוני לבין ליפופי המעגל המשני. כל אחד הוא פונקציה של x.

R_m התנגדות הכניסה של מעגל מדידת מתח היציאה V_0

נתון הקשר בין ההשראויות ההדדיות לתזוזה:

$$\tilde{S} \approx \frac{M_1 - M_2}{x}$$

מצאו קשר בין מתח היציאה E_o לבין x אשר תלוי גם בתדר ω_S. (הניחו גם כי $\tau_M << \sqrt{\tau_p \tau_s}$)

<u>פתרון שאלה 1</u>

א)

1) נרשום מאזן כוחות:

$$\hat{y}: \qquad N = mg\cos\theta$$
$$\hat{x}: \qquad m\ddot{x} = mg\sin\theta - Kx - \mu N$$

$$\rightarrow \qquad m\ddot{x} + Kx = mg\left(\sin\theta - \mu\cos\theta\right)$$

2) נפתח ביטוי ל- $\sin\theta$

$$\sin\theta \cong \theta = \theta_0 + 0.05\cdot\theta_0\cdot\sin\omega t = \theta_0\left(1 + 0.05\cdot\sin\omega t\right)$$

נציב את הביטוי למשוואה (הנחה: $\mu = 0$):

$$m\ddot{x} + Kx = mg\left[\sin\left(\theta\right)\right]$$
$$m\ddot{x} + Kx = mg\theta$$
$$m\ddot{x} + Kx = mg\left[\theta_0\left(1 + 0.05\cdot\sin\omega t\right)\right]$$
$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = g\left[\theta_0\left(1 + 0.05\cdot\sin\omega t\right)\right]$$
$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{K}{m}\cdot\frac{mg}{K}\left[\theta_0\left(1 + 0.05\cdot\sin\omega t\right)\right]$$
$$\boxed{\ddot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2\cdot\frac{mg}{K}\left[\theta_0\left(1 + 0.05\cdot\sin\omega t\right)\right] \qquad \omega_n^2 = \frac{K}{m}}$$

פונקציית התמסורת שהתקבלה:

$$Xs^2 + \omega_n^2 X = \omega_n^2\cdot\frac{mg}{K}\Theta$$
$$\frac{X}{\Theta} = \frac{mg}{K}\frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \equiv G\left(s\right)$$
$$G\left(j\omega\right) = \frac{mg}{K}\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

ההגבר והפאזה של המערכת הזו:

$$\left|G\right| = \frac{mg}{K}\frac{1}{1 + \frac{\omega_n^2}{\omega^2}} \qquad , \qquad \angle G = 0$$

מעי' מסדר שני באופן כללי:

$$\ddot{x}(t)+2\zeta\omega_n\dot{x}(t)+\omega_n^2x(t)=\omega_n^2K_s\cdot u(t)$$

$$H(s)\triangleq\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{K_s\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

ההגבר והפאזה באופן כללי:

$$\left|H(\omega)\right|=\frac{K_s}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}\qquad\qquad \angle H(\omega)=0-\arctan\left(\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right)$$

ניתן לראות כי הכניסה מורכבת משתי כניסות, אחת קבועה ושנייה תונדת

תזכורת- תגובת תדירות של מערכות ליניאריות:

נתונה מעי' ליניארית שפונקציית התמסורת שלה היא $G(s)$ והכניסה אליה היא $u(t)=A\sin(\omega t)$

היציאה מהמערכת ב<u>מצב מתמיד</u> תהיה:

$$x(t)=A\cdot\left|G(\omega)\right|\cdot\sin\left(\omega t+\angle G(\omega)\right)$$

בנוסף, אם הכניסה מורכבת מחיבור של כמה כניסות, לדוגמא:

$$u(t)=u_1(t)+u_2(t)=A_1\sin(\omega_1 t)+A_2\sin(\omega_2 t)$$

אז, מעיקרון הסופרפוזיציה, ניתן לחשב את היציאה כסכום של תגובות המערכת לכל תת-כניסה:

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=A_1\cdot\left|G(\omega_1)\right|\cdot\sin\left(\omega_1 t+\angle G(\omega_1)\right)+A_2\cdot\left|G(\omega_2)\right|\cdot\sin\left(\omega_2 t+\angle G(\omega_2)\right)$$

לכן, נפתור בעזרת סופרפוזיציה של תגובת המערכת לשתי הכניסות בנפרד:

- כניסה קבועה

$$u_1(t)=\theta_0\Rightarrow\omega=0\qquad\qquad \left|G(\omega=0)\right|=\frac{mg}{K}\qquad\qquad \angle G(\omega=0)=0$$

$$x_1(t)=\frac{mg}{K}\cdot\theta_0$$

- באותו האופן עבור כניסת הסינוס:

$$\left|G(\omega)\right|=\frac{mg}{K}\cdot\frac{1}{1-\frac{m\omega^2}{K}}=\frac{mg}{K}\cdot\frac{K}{K-m\omega^2}\qquad\qquad \phi=\angle G(\omega)=0$$

$$x_2(t)=\frac{mg}{K-m\omega^2}\cdot 0.05\cdot\theta_0\sin\omega t$$

$$\boxed{x(t)=x_1(t)+x_2(t)=\frac{mg}{K}\theta_0+\frac{mg}{K-m\omega^2}\cdot 0.05\theta_0\sin(\omega t)}$$

ב)

עבור הקירוב הנתון, קשר כניסה יציאה בין מתח העירור של ה-LVDT למתח היציאה הוא:

הערה: פיתוח מלא לסעיף זה מובא בהקדמה ל-LVDT בתרגול זה.

$$\frac{E_{\text{out}}}{E_{\text{ex}}}=\frac{\left(M_1-M_2\right)}{\left(R_s+R_m\right)R_p}R_m\frac{s}{\left(1+\tau_s s\right)\left(1+\tau_p s\right)}$$

נתון כי הקשר בין הפרש ההשראויות ההדדיות לתזוזה הוא:

$$\tilde{S}\approx\frac{M_1-M_2}{x}$$

לכן:

$$E_{\text{out}}=E_{\text{ex}}\frac{SX}{\left(R_s+R_m\right)R_p}R_m\frac{s}{\left(1+\tau_s s\right)\left(1+\tau_p s\right)}$$

$$E_{\text{out}}=E_{\text{ex}}\frac{SX}{\left(R_s+R_m\right)R_p}R_m\frac{j\omega_s}{\left(1+\tau_s j\omega_s\right)\left(1+\tau_p j\omega_s\right)}=$$

$$=E_{\text{ex}}\frac{SR_m}{\left(R_s+R_m\right)R_p}\frac{j\omega_s}{\left(1-\tau_s\tau_p\omega_s^{\,2}\right)+\omega_s\left(\tau_s+\tau_p\right)j}\cdot X$$

נמצא את ההגבר והפאזה:

$$\left|E_{\text{out}}\right|=E_{\text{ex}}\frac{SR_m}{\left(R_s+R_m\right)R_p}\frac{\omega_s}{\sqrt{\left(1-\tau_s\tau_p\omega_s^{\,2}\right)^2+\omega_s^{\,2}\left(\tau_s+\tau_p\right)^2}}X$$

$$\angle E_{\text{out}}=\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{\omega_s\left(\tau_s+\tau_p\right)}{1-\tau_s\tau_p\omega_s^{\,2}}\right)$$