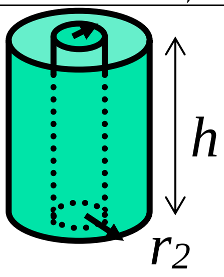
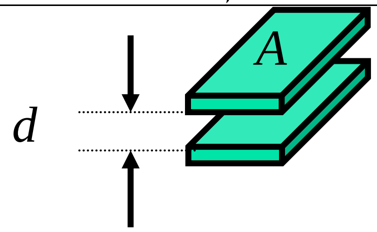
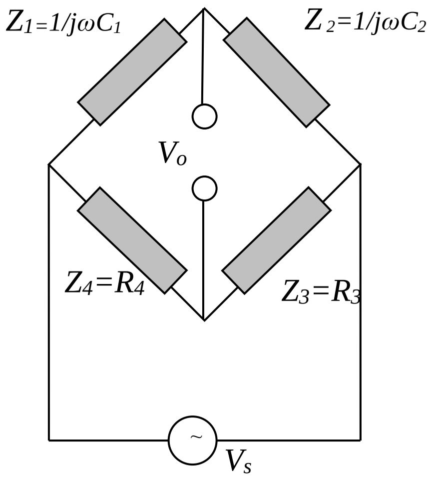
תרגיל כיתה 6

- עקרון מדידה של החיישנים קיבוליים מתבסס על שינוי האימפדנס של המדיד עקב שינוי הקיבול שלו .
- דוגמאות נפוצות לקבלים :

קבל צילינדרי	קבל לוחות
	
$C=\varepsilon_0\varepsilon_r\dfrac{2\pi h}{\ln\left(r_2/r_1\right)}$	$C=\varepsilon_0\varepsilon_r\dfrac{A}{d}$

דוגמא לחיבור לגשר :

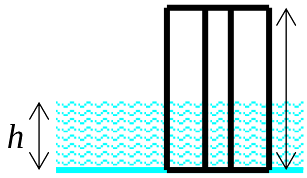
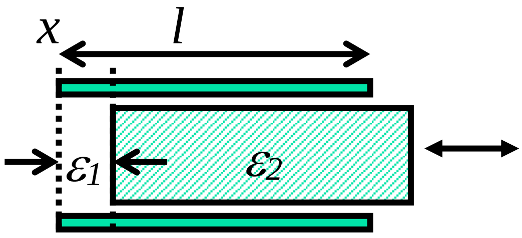
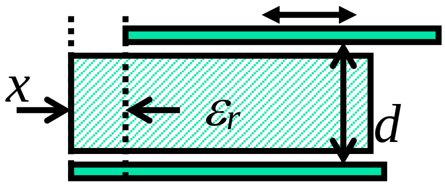
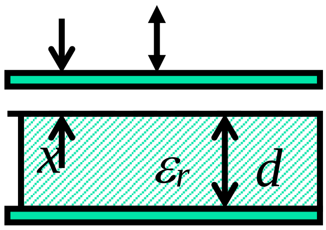
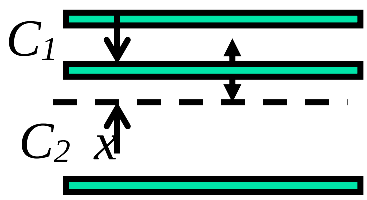


$$V_o=V_s\left\{\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}-\frac{Z_3}{Z_3+Z_4}\right\}$$

$$V_o=V_s\left\{\frac{1/\,j\omega C_2}{1/\,j\omega C_2+1/\,j\omega C_1}-\frac{R_3}{R_3+R_4}\right\}$$

$$V_o=V_s\left\{\frac{C_1}{C_1+C_2}-\frac{1}{2}\right\}$$

דוגמאות נוספות לחיישנים קיבוליים:

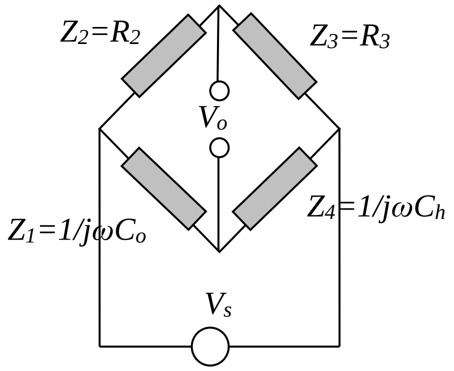
	$C(h) = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(r_2/r_1)}\left[l + (\varepsilon_w - 1)h\right]$
	$C = \varepsilon_0 \frac{w}{d}(\varepsilon_2 l + x(\varepsilon_1 - \varepsilon_2))$
	$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{w(l-x)}{d}$
	$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d+x}$
	$C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d+x}$ $C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d-x}$

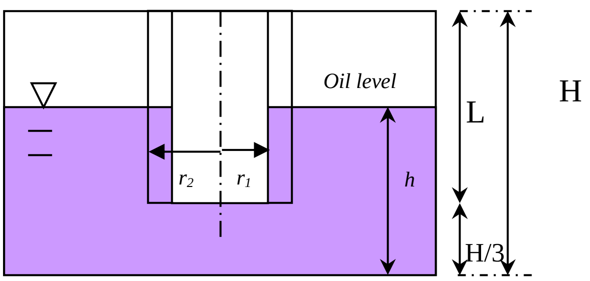
** הערה: $A = wl$

שאלה 1:

ברצוננו לתכנן מערך למדידת גובה פני השמן ($\varepsilon = 5$) במכל אגירה המבוסס על חיישן קיבולי. לשם כך מציבים בתוך מכל האגירה שני צינורות קונצנטריים בעלי אורך L , כמתואר בציור 1.1 . שני הצינורות יוצרים קבל C_h המשתנה כתלות בגובה השמן במכל - h. קבל זה מחובר למעגל חשמלי המתואר בציור 1.2. ידוע כי גובה השמן משתנה בתחום H - 1/3H.

נתונה המערכת ונתון אופן החיבור של החיישן לגשר:





א) מצאו את הקשר שבין הקיבול C_h לבין גובה השמן במכל.

ב) מצאו את מתח היציאה V_o כתלות בפרמטרים R_2, R_3, C_0 ובמשתנה C_h .

ג) בחרו את הקיבול C_o (בתלות בנתוני השאלה) כך שהגשר יהיה מאוזן כאשר $h = H/3$.

ד) עבור הקיבול C_o שבחרתם בסעיף ג', הניחו כי $R_2 << R_3$ והוכיחו כי הקשר הליניארי בין h ל- V_o נתון על-ידי הנוסחא:

$$V_o = V_s \frac{R_2}{R_3} \frac{(\varepsilon_r - 1)\left(h - \frac{1}{3}H\right)}{L}$$

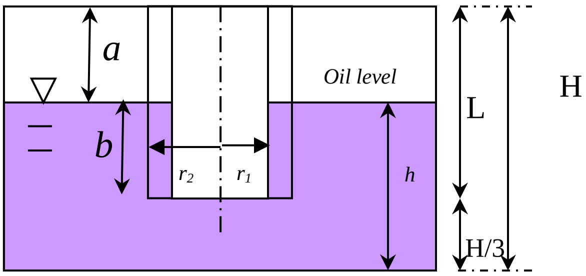
שאלה 1 – פתרון

א) הקיבול בין שני הצינורות הינו סכום הקיבולים של שני קבלים במקביל: האחד עם חומר דיאלקטרי בעל קבוע ε_o (אויר) והשני בעל קבוע יחסי ε_r (השמן). באופן כללי הקיבול של קבל צינורות קונצנטריים הוא:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}{\ln\left(r_2/r_1\right)} l$$

כאשר: l – *אורך הקבל* ו- $r_{1,2}$ *רדיוסים של הצינורות*

במקרה שלנו אורך הקבל משתנה לפי גובה השמן ולכן:



$$C_h = \frac{2\pi\varepsilon_o\varepsilon_r \cdot b}{\ln\left(r_2/r_1\right)} + \frac{2\pi\varepsilon_o \cdot a}{\ln\left(r_2/r_1\right)}$$

where:

$$b = h - H/3$$

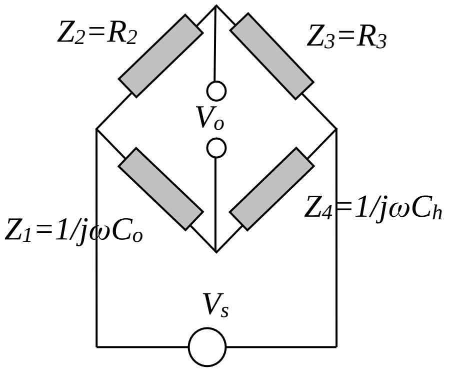
$$a = L - h + H/3$$

$$C_h = \frac{2\pi\varepsilon_o\varepsilon_r\left(h - H/3\right)}{\ln\left(r_2/r_1\right)} + \frac{2\pi\varepsilon_o\left(L - h + H/3\right)}{\ln\left(r_2/r_1\right)} =$$

$$= \frac{2\pi\varepsilon_o}{\ln\left(r_2/r_1\right)}\left[\varepsilon_r\left(h - H/3\right) + L - h + H/3\right] =$$

$$= \frac{2\pi\varepsilon_o}{\ln\left(r_2/r_1\right)}\left[L + \left(\varepsilon_r - 1\right)\cdot\left(h - H/3\right)\right]$$

ב) מתח היציאה מהגשר עבור החיבור הנתון :



$$V_o = V_S\left[\frac{R_3}{R_2+R_3}-\frac{Z_4}{Z_4+Z_3}\right]$$

$$= V_S\left[\frac{R_3}{R_2+R_3}-\frac{1/j\omega C_h}{1/j\omega C_o + 1/j\omega C_h}\right]=$$

$$= V_S\left[\frac{R_3}{R_2+R_3}-\frac{C_o}{C_h+C_o}\right]=$$

$$= V_S\left[\frac{1}{R_2/R_3+1}-\frac{1}{C_h/C_o+1}\right]$$

ג) רוצים שהמעגל יהיה מאוזן כאשר $h=H/3$. לכן :

$$V_o = V_S\left[\frac{1}{\frac{R_2}{R_3}+1}-\frac{1}{\frac{C_h\left(h=H/3\right)}{C_o}+1}\right]=0$$

$$V_S \neq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\frac{R_2}{R_3}+1}=\frac{1}{\frac{C_h\left(h=H/3\right)}{C_o}+1}\Rightarrow \frac{R_2}{R_3}=\frac{C_h\left(h=H/3\right)}{C_o}$$

$$C_o=\frac{R_3}{R_2}C_h\left(h=H/3\right)=$$

$$=\frac{R_3}{R_2}\cdot\frac{2\pi\varepsilon_o}{\ln\left(r_2/r_1\right)}\left[L+\left(\varepsilon_r-1\right)\cdot\underbrace{\left(h-H/3\right)}_{=0}\right]=$$

$$=\frac{R_3}{R_2}\frac{2\pi\varepsilon_o}{\ln\left(r_2/r_1\right)}L$$

ד) נניח כי $R_2 << R_3$:

$$V_o = V_S\left[\frac{1}{\frac{R_2}{R_3}+1}-\frac{1}{\frac{C_h}{C_o}+1}\right] = V_S\left[\frac{1}{\frac{R_2}{R_3}+1}-\frac{1}{\frac{C_h}{C_o}+1}\right]$$

כאשר:

$$C_h = \frac{2\pi\varepsilon_o}{\ln\left({r_2}/{r_1}\right)}\left[L+\left(\varepsilon_r-1\right)\cdot\left(h-H/3\right)\right]$$

$$C_o = \frac{R_3}{R_2}\frac{2\pi\varepsilon_o}{\ln\left({r_2}/{r_1}\right)}L$$

נציב את היחס $\frac{C_h}{C_o}$:

$$V_o = V_S\left[\frac{1}{\frac{R_2}{R_3}+1}-\frac{1}{\frac{C_h}{C_o}+1}\right] = V_S\left[\frac{1}{\frac{R_2}{R_3}+1}-\frac{1}{\frac{L+\left(\varepsilon_r-1\right)\cdot\left(h-H/3\right)}{\frac{R_3}{R_2}L}+1}\right]$$

נסמן: $\frac{R_2}{R_3} \triangleq \delta$

$$V_o = V_S\left[\frac{1}{\delta+1}-\frac{1}{\frac{L+\left(\varepsilon_r-1\right)\cdot\left(h-H/3\right)}{\frac{L}{\delta}}+1}\right] = V_S\left[\frac{1}{\delta+1}-\frac{\frac{L}{\delta}}{L+\left(\varepsilon_r-1\right)\cdot\left(h-H/3\right)+\frac{L}{\delta}}\right] =$$

$$= V_S\left[\frac{1}{\delta+1}-\frac{L}{\left[L+\left(\varepsilon_r-1\right)\cdot\left(h-H/3\right)\right]\delta+L}\right] = V_S\left[\frac{1}{\delta+1}-\frac{1}{\left[1+\frac{\left(\varepsilon_r-1\right)\cdot\left(h-H/3\right)}{L}\right]\delta+1}\right]$$

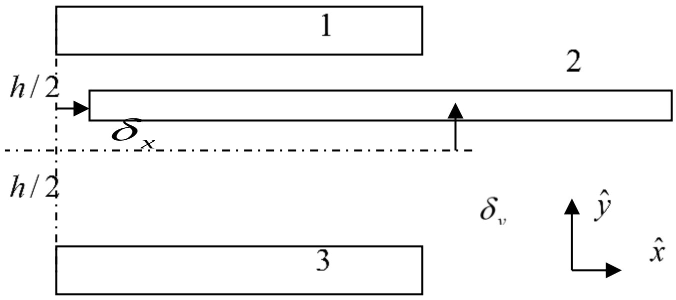
linear approx. of $\frac{1}{1+a\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}1-a\varepsilon$

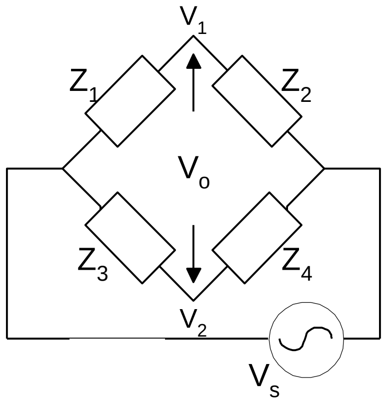
$$V_o = V_S\left[1-\delta-\left[1-\delta\left(1+\frac{\left(\varepsilon_r-1\right)\cdot\left(h-H/3\right)}{L}\right)\right]\right] = V_S\left[-\delta+\delta\left(1+\frac{\left(\varepsilon_r-1\right)\cdot\left(h-H/3\right)}{L}\right)\right] =$$

$$= V_S\frac{\left(\varepsilon_r-1\right)\cdot\left(h-H/3\right)}{L}\cdot\delta \underbrace{=}_{\delta=R_2/R_3} V_S\frac{R_2}{R_3}\frac{\left(\varepsilon_r-1\right)\cdot\left(h-H/3\right)}{L}$$

שאלה 2

נתון חיישן קיבולי לחישת תנועה כמתואר בציור :





החיישן כולל שני לוחות קבל מקובעים (לוח 1 ולוח 3) ולוח אשר חופשי לנוע בכיוון $\hat{x}$, ובכיוון $\hat{y}$, (לוח 2). הלוחות בעלי אורך L_0 ורוחב b. המרחק בין הלוחות 1 ו-3 הוא h.

לוח 2 נע מרחקים <u>קטנים</u> δ_x ו- δ_y, ממצב נומינלי בו לוח 2 נמצא במרחק $h/2$ מלוחות 1 ו-3 והשטח החופף בין לוח 2 ולוחות 1 ו-3 הוא $A_0 = L_0 b$.

א. כיצד יש לחבר את החיישן לגשר על מנת למדוד תזוזות בכוון $\hat{y}$? צייר תיאור סכימטי של המעגל.

ב. קבע את הסוג והגודל של הרכיבים שיש לחבר בשאר הענפים על מנת שהגשר יהיה מאוזן.

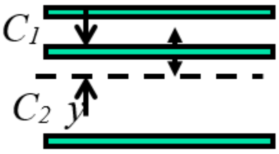
ג. פתח ביטוי **מדויק** עבור רגישות המעגל (החיישן כולל הגשר).

ד. בצע לינארזציה לביטוי שפיתחת בסעיף הקודם (אם יש צורך) ומצא את שגיאת אי-הלינאריות.

ה. חזור על הסעיפים א׳-ד׳ כאשר המטרה מדידת תזוזות בכוון $\hat{x}$ ע״י החיישן ולא קיימות תזוזות בכיוון $\hat{y}$.

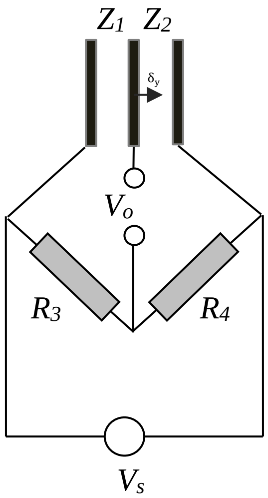
פתרון שאלה 2

א) על-מנת למדוד תזוזות בציר ה-y, ניתן להשתמש בצורת חיבור הבאה :

	$C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{A}{d+y}$ $C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{A}{d-y}$

חיבור לגשר-

מכיוון שהמדידה היא דיפרנציאלית (תזוזה ב-y גורמת ללוחות קבל אחד להתקרב לשני להתרחק), ניתן לחבר את לוחות הקבל החיצוניים ל-2 ענפים סמוכים בגשר (נרצה פעולת חיסור אנלוגי מהגשר) :



נחשב את השתנות האימפדנס של הקבלים כתלות בתזוזה ב-y :

$$Z_i = \frac{1}{j\omega C_i} \;,\; C_i = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d \pm \delta_y} \;\Rightarrow\; Z_i = \frac{d \pm \delta_y}{j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r A} = \underbrace{\frac{d}{j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r A}}_{=Z_0} \pm \underbrace{\frac{\delta_y}{j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r A}}_{=\Delta Z}$$

$$Z_1 = Z_0 + \Delta Z \;,\; Z_2 = Z_0 - \Delta Z$$

כאשר, במקרה שלנו $d = \dfrac{h}{2}$

$$Z_0 = \frac{h/2}{\varepsilon_r \varepsilon_0 A_0 \omega j} \;,\; Z_1 = \frac{h/2 + \delta_y}{\varepsilon_r \varepsilon_0 A_0 \omega j} \;,\; Z_2 = \frac{h/2 - \delta_y}{\varepsilon_r \varepsilon_0 A_0 \omega j}$$

חיבור זה יבטיח את ליניאריות המדידה כפי שנראה בהמשך.

ב)

תחילה, נמצא ביטוי למוצא הגשר (בענפים 3,4 נציב נגדים כך ש- $Z_3 = R_3, Z_4 = R_4$)

$$V_0 = V_s\left[\frac{Z_2}{Z_1+Z_2} - \frac{Z_4}{Z_3+Z_4}\right] = V_s\left[\frac{Z_0-\Delta Z}{Z_0+\Delta Z+Z_0-\Delta Z} - \frac{R_4}{R_3+R_4}\right] = V_s\left[\frac{Z_0-\Delta Z}{2Z_0} - \frac{R_4}{R_3+R_4}\right]$$

כאשר הלוח החופשי נמצא במרכז - $\Delta Z = 0$, נמצא את הביטוי למתח המוצא ונשווה לאפס:

$$V_0 = V_s\left[\frac{Z_0-\overbrace{\cancel{\Delta Z}}^{=0}}{2Z_0} - \frac{R_4}{R_3+R_4}\right] = V_s\left[\frac{1}{2} - \frac{R_4}{R_3+R_4}\right] \underbrace{=}_{\text{want}} 0 \rightarrow \frac{R_4}{R_3+R_4} = \frac{1}{2} \rightarrow R_3 = R_4$$

לכן, נחבר שני נגדים ששווים זה לזה.

ג) נזכר באימפדנסים של הקבלים:

$$Z_i = \frac{d \pm \delta_y}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r A} = \underbrace{\frac{d}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r A}}_{=Z_0} \pm \underbrace{\frac{\delta_y}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r A}}_{=\Delta Z}$$

נחשב את היחס $\frac{\Delta Z}{Z_0}$:

$$\frac{\Delta Z}{Z_0} = \frac{\frac{\delta_y}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r A}}{\frac{h/2}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r A}} = \frac{\delta_y}{h/2}$$

מוצא הגשר באופן כללי:

$$V_0 = V_s\left[\frac{Z_0-\Delta Z}{2Z_0} - \frac{1}{2}\right] = V_s\left[\frac{1-\frac{\Delta Z}{Z_0}}{2} - \frac{1}{2}\right] = V_s\left[\frac{1-\frac{\delta_y}{h/2}}{2} - \frac{1}{2}\right] = -V_s\frac{\delta_y}{h}$$

רגישות המעגל לתזוזה ב-y:

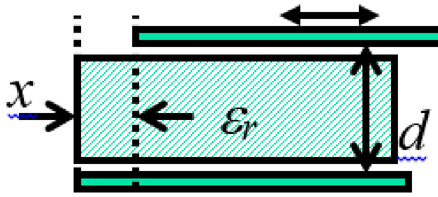
$$S = \frac{dV_o}{d\delta_y} = -\frac{V_s}{h} = \text{const}$$

קיבלנו רגישות קבועה. הדבר צפוי מפני שמוצא הגשר הוא ליניארי בתזוזה ב-y

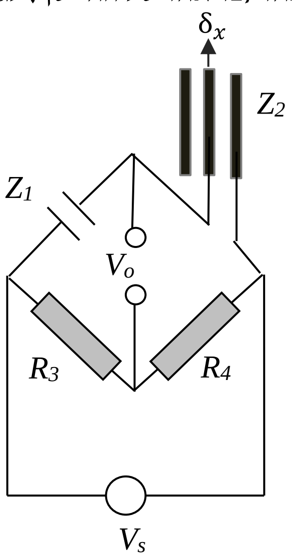
ד)
המדידה ליניארית ולכן אין שגיאת אי ליניאריות.

ה) מדידת תזוזות בכיוון $\hat{x}$:

במקרה זה אנו מושכים לוח אחד של הקבל בכיוון x בדומה למקרה הבא מהטבלת עזר :

$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{w(l-x)}{d}$	

חיבור לגשר:
כעת המדידה אינה דיפרנציאלית ולכן נחבר רק קבל אחד (צד אחד של החיישן) לגשר, ובענף הסמוך נחבר קבל קבוע.



ערך הקבל הקבוע יהיה Z_0 , כך שהגשר יהיה מאוזן עבור ערך תזוזה אפס. כמו קודם נחבר בענפים 3 ו-4 נגדים בעלי ערך שווה.

נרשום כעת את הביטוי המתקבל עבור $\frac{\Delta Z}{Z_0}$:

$$Z_1 = Z_0 = \frac{h/2}{\varepsilon\varepsilon_0 b L_0 \omega j} \ , \ Z_2 = \frac{h/2}{\varepsilon\varepsilon_0 b\left(L_0 - \delta_x\right)\omega j}$$

מתח המוצא מהגשר :

$$V_0 = V_s\left[\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}-\frac{R}{R+R}\right]=V_s\left[\frac{\dfrac{h/2}{\varepsilon\varepsilon_0 b\left(L_0-\delta_x\right)\omega j}}{\dfrac{h/2}{\varepsilon\varepsilon_0 b\left(L_0-\delta_x\right)\omega j}+\dfrac{h/2}{\varepsilon\varepsilon_0 b L_0\omega j}}-\frac{1}{2}\right]=$$

$$=V_s\left[\frac{\dfrac{1}{\left(L_0-\delta_x\right)}}{\dfrac{1}{\left(L_0-\delta_x\right)}+\dfrac{1}{L_0}}-\frac{1}{2}\right]=V_s\left[\frac{L_0}{L_0+L_0-\delta_x}-\frac{1}{2}\right]=V_s\left[\frac{L_0}{2L_0-\delta_x}-\frac{1}{2}\right]=$$

$$=\frac{V_s}{2}\left[\frac{2L_0-2L_0+\delta_x}{2L_0-\delta_x}\right]=\frac{V_s}{2}\left[\frac{\delta_x}{2L_0-\delta_x}\right]$$

עבור ערכי δ_x קטנים מאד ניתן להשתמש בקירוב הליניארי :

(תזכורת קירוב טיילור מסדר1 $\frac{x}{a+x}\xrightarrow{x\to 0}\frac{x}{a}$)

$$V_0 = V_s\frac{\delta_x}{4L_0}$$

שגיאת אי הליניאריות תהיה אם כך-

$$\frac{V_{o,NL}-V_{o,Linear}}{V_{o,NL}}=\frac{\dfrac{V_s}{2}\left[\dfrac{\delta_x}{2L_0-\delta_x}\right]-V_s\dfrac{\delta_x}{4L_0}}{V_s\left[\dfrac{\delta_x}{4L_0-2\delta_x}\right]}=\frac{\dfrac{1}{4L_0-2\delta_x}-\dfrac{1}{4L_0}}{\dfrac{1}{4L_0-2\delta_x}}=\frac{\delta_x}{2L_0}$$