



מבוא למערכות משולבות חיישנים מבוא (המשך)

1. מטרת הקורס
2. מבנה הקורס
3. דוגמאות
4. סיווג חיישנים
5. מערכות משולבות חיישנים: דוגמאות
6. גישה מערכתית ומפרטים
- 7. מפרט סטטי ומקורות שגיאה**

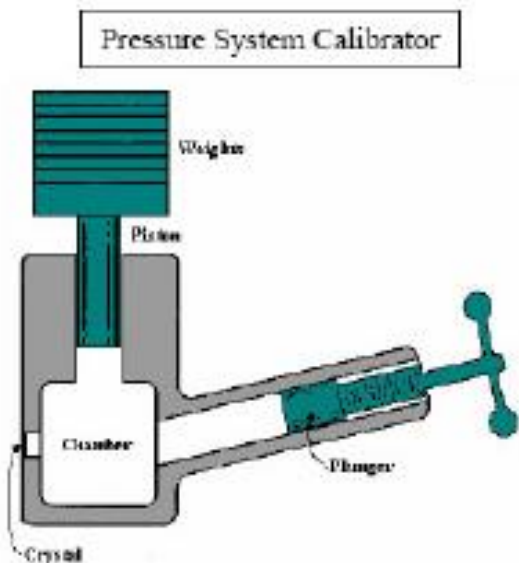


מפרט סטטי ראשי

- **Range/span** (*maximum-minimum values*) תחום •
- **Sensitivity** (\equiv *calibration factor*) רגישות •
- **Accuracy & Error** דיוק ושגיאה •
- **Precision, Repeatability and Reproducibility** ... הדירות •
- **Sensitivity to environment** (*) רגישות לסביבה •
- **Linearity** (*deviation from linear relationship*) ליניאריות •
- **Resolution** (*lower limit of measured quantity*) כושר הבחנה •
- **Hysteresis** היסטריזיס •

נקבעים ע"י תהליך הכיול ...

כיוול

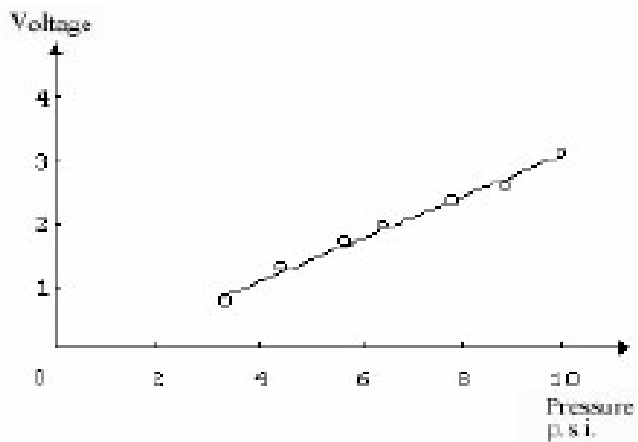


כיוול: מדידה של גודל פיסיקלי שערכו ידוע כדי לקבוע את קשר הכניסה/יציאה בין הגודל הנמדד x והערך המדוד y .

– כיוול סטטי – הגודל הנמדד מאולץ באופן מבוקר לערכים ידועים בהם מתבצעת המדידה.

הגודל הנמדד נשאר קבוע במהלך המדידה.

Possible Calibration



– גרף הכיוול מתאר את קשר הכניסה/יציאה הסטטי שבעזרתו אפשר לקבוע את ערך הגודל הנמדד בהתאם לערך המדוד.

– כיוול דינאמי – הגודל הנמדד מאולץ להשתנות באופן מבוקר במהלך המדידה, כאות סינוסאידאלי, אות מדרגה . . . וכו', בכדי לקבוע את התכונות הדינמיות של מערכת המדידה.



מפרט סטטי - תחום

תחום – Range or Full Scale (FS)

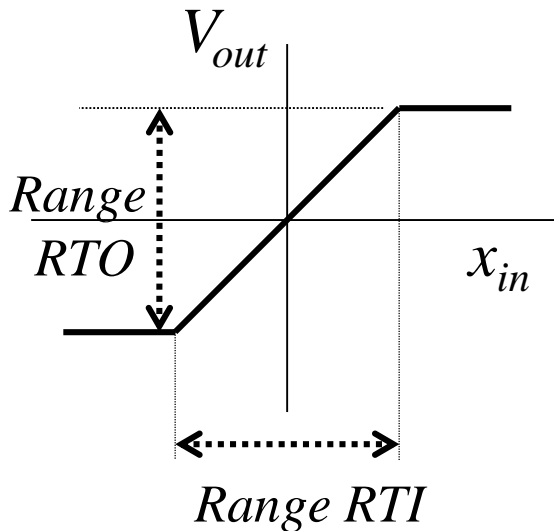
זהו תחום המדידה שעבורו התבצע הכיול ושבו מתקיים קשר הכניסה/יציאה שנקבע בכיול (עד הדיוק שנקבע במפרט).



התחום יכול להיות מוגדר:

- ביחס לכניסה (RTI) דוגמה: $0-100N$
- ביחס ליציאה (RTO) דוגמה: $0-5V$

מחוץ לתחום המדידה הקשר אינו מהימן!!





מפרט סטטי – תחום מקסימלי

בתחום העבודה המפרט תקף.

יציאה מתחום העבודה תגרום לשגיאה מעבר לצפוי לפי המפרט.

– דוגמא: מערכת ליניארית עם רוויה

במפרט מוגדרים שני תחומים נוספים המתייחסים לנזק צפוי למערכת המדידה:

- Maximum input
- Max Permissible input

דוגמא- חיישן כוח

- תחום RTO : +/-5V
- רגישות: 10mV/N
- Max load : +/- 1000N
- Max Permissible load : +/- 2000N

נחשב תחום מדידה RTI ←

$$\frac{\pm 5[V]}{0.01[V/N]} = \pm 500 [N]$$



מפרט סטטי – רגישות



Sensitivity = רגישות

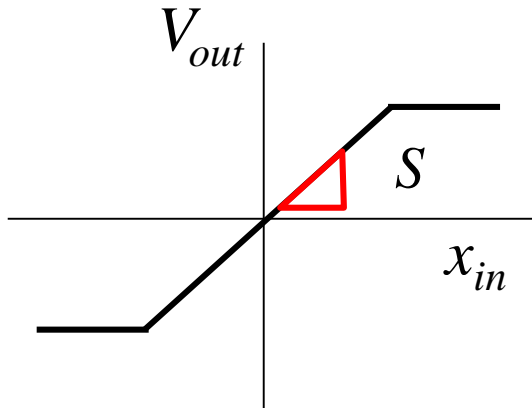
קצב שינוי אות היציאה ביחס לאות הכניסה

$$S = S(x_1) = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_1}$$

רגישות סטטית (Static Sensitivity) – שיפוע גרף הכיול

$$V_{out} = S \cdot x_{in} \quad S = \left[\frac{V_{out}}{x_{in}} \right]$$

עבור מערכות לינאריות (ללא היסט):



• מד כח: $S \left[\frac{V}{N}, \frac{mV}{N} \right]$

• מד תאוצה: $S \left[\frac{mV}{g} \right]$

• צמד תרמי: $S \left[\frac{\mu V}{^{\circ}C} \right]$



מפרט סטטי – רגישות (המשך)

- במערכות לא לינאריות:

$$S = \frac{\partial y_{out}}{\partial x_{in}} \neq \text{const}$$

הרגישות משתנה עם הגודל הנמדד

- קשר לא לינארי כללי: $x_{in} = g^{-1}(V_{out})$ $V_{out} = g(x_{in})$

- דוגמא: צמד תרמי << קשר פולינומיאלי

$$V_{out} = a_0 + a_1 x_{in} + a_2 x_{in}^2 + \dots$$

- במערכת ממוחשבת ניתן לאחסן את המקדמים ולחשב לפי נוסחה את x_{in} מ- V_{out} .

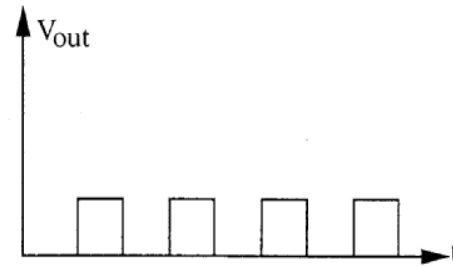
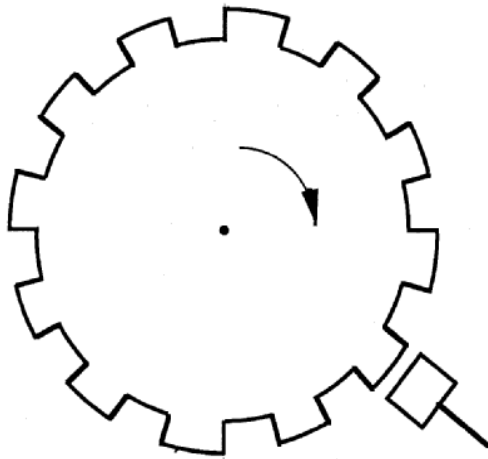


מפרט סטטי – רגישות בחיישנים ספרתיים

בחיישנים ספרתיים הרגישות מוגדרת בהתאם למקרה.

דוגמא:

מד מהירות סיבוב המבוסס על ספירת מספר פולסים ליחידת זמן



Physical input : f_{wheel}

Measured output : f_{signal}

$$S \left[\frac{f_{signal}}{f_{wheel}} \right] = \frac{\# Pulses / sec}{Rev / sec} = \frac{\# Pulses}{Rev} = N_{Teeth}$$



דיוק (Accuracy) ושייאה (Error)

דיוק – מידת הקרבה של הגודל המדוד לגודל האמיתי (שאינו ידוע)
שייאה – ההפרש בין הגודל המדוד לגודל האמיתי (שאינו ידוע)

$$e_{ABS} = v_{measured} - v_{real} = \text{שייאה מוחלטת}$$

$$e_{REL} \% = 100 \% \frac{e_{ABS}}{v_{reference}} = \text{שייאה יחסית}$$

קיימים שני סוגים של שייאה יחסית . . .

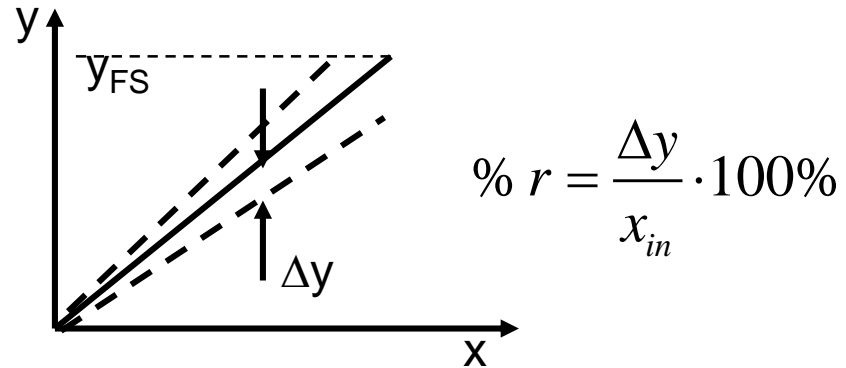


שגיאה יחסית

שגיאה כאחוז מערך מדוד (%reading)

- שגיאה יחסית קבועה בתחום
- שגיאה מוחלטת משתנה, גדלה עם הגודל הנמדד

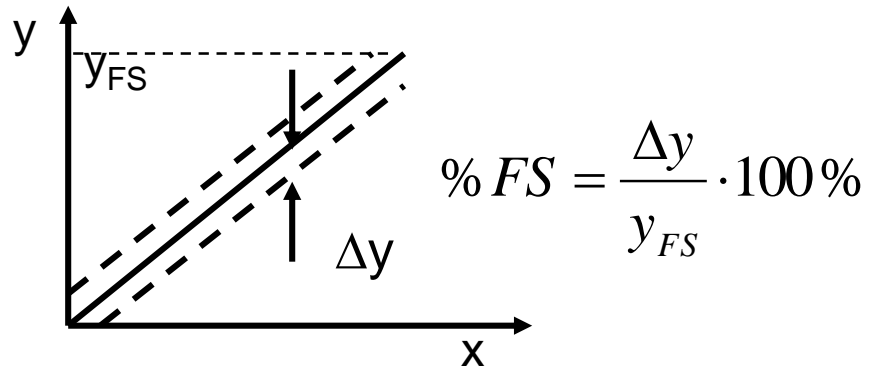
FS = 0-10 bar דוגמא: מד לחץ
 +/- 5% reading - דיוק
 FS - 0.5 bar ←
 1bar - 0.05 bar ←



שגיאה כאחוז מהתחום (%Full Scale, %FS)

- שגיאה מוחלטת קבועה בתחום
- שגיאה יחסית (לערך מדוד) משתנה, גדולה במדידת גדלים קטנים

FS = 0-10 bar דוגמא: מד לחץ
 +/- 1% FS - דיוק
 +/- 0.1 bar בכל התחום ←





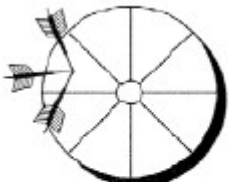
מאפייני דיוק – הדירות ונכונות



Low repeatability – high precision error; but bias might be small



High accuracy means low precision and bias errors



High repeatability – low precision error; but bias might be high leading to poor accuracy

- הדירות Precision – מידת הקרבה בין הערכים המדודים במדידות שונות של אותו גודל

- שחזור Repeatability – פיזור בין חזרות (Repetitions) של המדידה באותו ניסוי

- הישנות Reproducibility – פיזור בין מדידות משחזורים (Replications) שונים של הניסוי

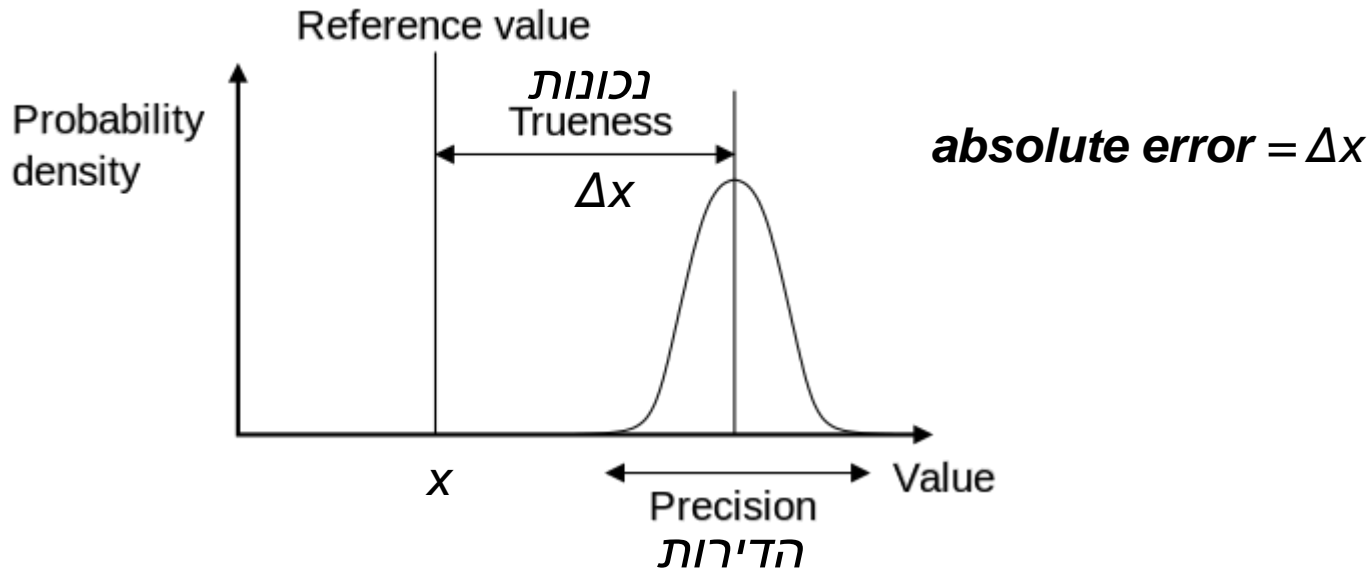
- נכונות Trueness – מידת הקרבה של ממוצע המדידות של גודל מסוים, לערך הממשי האמיתי של אותו גודל

- דיוק Accuracy = נכונות והדירות



שגיאה שיטתית (שגיאת היסט)

- שגיאה שיטתית (*systematic error*) מגדירה את רמת הנכונות
- ידועה גם כשגיאת היסט *bias error*
- שגיאה מוחלטת ביחידות של הגודל הנמדד $absolute\ error = \Delta x$
- (אפשר להביע כשגיאה יחסית)
- ניתן לכמת ע"י רווח חיזוי (ראה שקפים בהמשך)





שגיאה אקראית

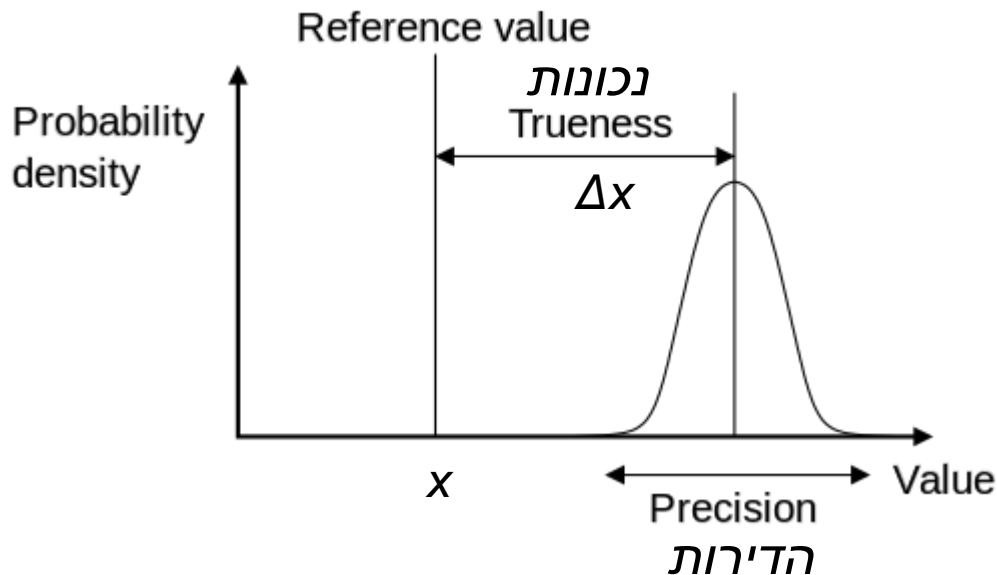
• שגיאה אקראית (*statistical error*) מגדירה את רמת ההדירות

• מכמתים ע"י רווח חיזוי

– רווח חיזוי: מרווח הכולל אחוז מסוים (בד"כ $p = 95\%$) של המדידות (מתאר את הפיזור של גודל אקראי), **ראה בהמשך ...**

– זוהי שגיאה מוחלטת ביחידות של הגודל הנמדד

– (אפשר להביע כשגיאה יחסית)





רווח חיזוי Predictive Interval

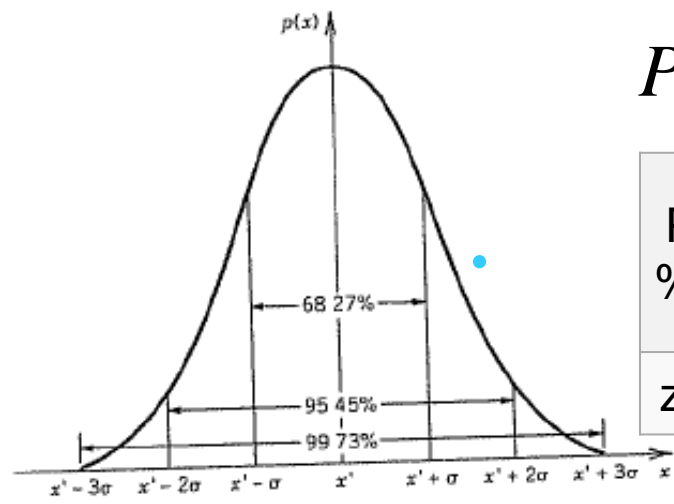
- רווח חיזוי Predictive interval = התחום שבו חוזים שיימצאו $P\%$ של המדידות

– סימון: (עבור פילוג סימטרי) $x = \mu \pm z\sigma$ ($P\%$)

– עבור הפילוג הנורמאלי

כלומר:

$$P(\mu - z\sigma \leq x \leq \mu + z\sigma) = P / 100$$



P %	50	68.27	90	95	95.45	99	99.73
z	0.67	1.0	1.64	1.96	2.0	2.58	3.0

(*) אם סטיית התקן משוערכת ממדגם מדידות סופי אז צריך להחליף את המכפיל z ב *student statistics*



רווח חיזוי מדגמי

- ממוצע מידגמי: $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$

- שונות מידגמית: $S_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$

– מספר ד"ח בשערוך, ν , הוא מספר המדידות במדגם פחות מספר הפרמטרים המשוערכים המשמשים בשערוך
– דוגמא: מספר ד"ח בשערוך השונות $\nu = N-1$

- רווח חיזוי מידגמי: $x = \bar{x} \pm t_{\nu,P} S_x$ (%P)

– שמשמעו: $P(\bar{x} - t_{\nu,P} S_x \leq x_i \leq \bar{x} + t_{\nu,P} S_x) = P / 100$

– $t_{\nu,P}$ = student's t statistics with ν DOF and %P

– $t_{\nu,P}$ יותר רחב מ-z עבור $N < 60$



Student t statistics

$t_{v,P} > z(P)$ עבור $v < 60$ רווח הסמך לפי מדגם יותר רחב

Table 4.4 Student-t Distribution

ν	t_{50}	t_{90}	t_{95}	t_{99}
1	1.000	6.314	12.706	63.657
2	0.816	2.920	4.303	9.925
3	0.765	2.353	3.182	5.841
4	0.741	2.132	2.770	4.604
5	0.727	2.015	2.571	4.032
6	0.718	1.943	2.447	3.707
7	0.711	1.895	2.365	3.499
8	0.706	1.860	2.306	3.355
9	0.703	1.833	2.262	3.250
10	0.700	1.812	2.228	3.169
11	0.697	1.796	2.201	3.106
12	0.695	1.782	2.179	3.055
13	0.694	1.771	2.160	3.012
14	0.692	1.761	2.145	2.977
15	0.691	1.753	2.131	2.947
16	0.690	1.746	2.120	2.921
17	0.689	1.740	2.110	2.898
18	0.688	1.734	2.101	2.878
19	0.688	1.729	2.093	2.861
20	0.687	1.725	2.086	2.845
21	0.686	1.721	2.080	2.831
30	0.683	1.697	2.042	2.750
40	0.681	1.684	2.021	2.704
50	0.680	1.679	2.010	2.679
60	0.679	1.671	2.000	2.660
∞	0.674	1.645	1.960	2.576

$$t_{v,P} \xrightarrow{v \rightarrow \infty} z(P)$$



הפילוג של הממוצע המדגמי

- הממוצע המדגמי הוא משתנה אקראי:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

- תחום הערכים של הממוצע האמיתי (בסבירות $\%P$):
– בהיעדר שגיאות סיסטמאטיות

$$\mu = \bar{x} \pm t_{\nu, P} S_{\bar{x}} \quad (\%P)$$

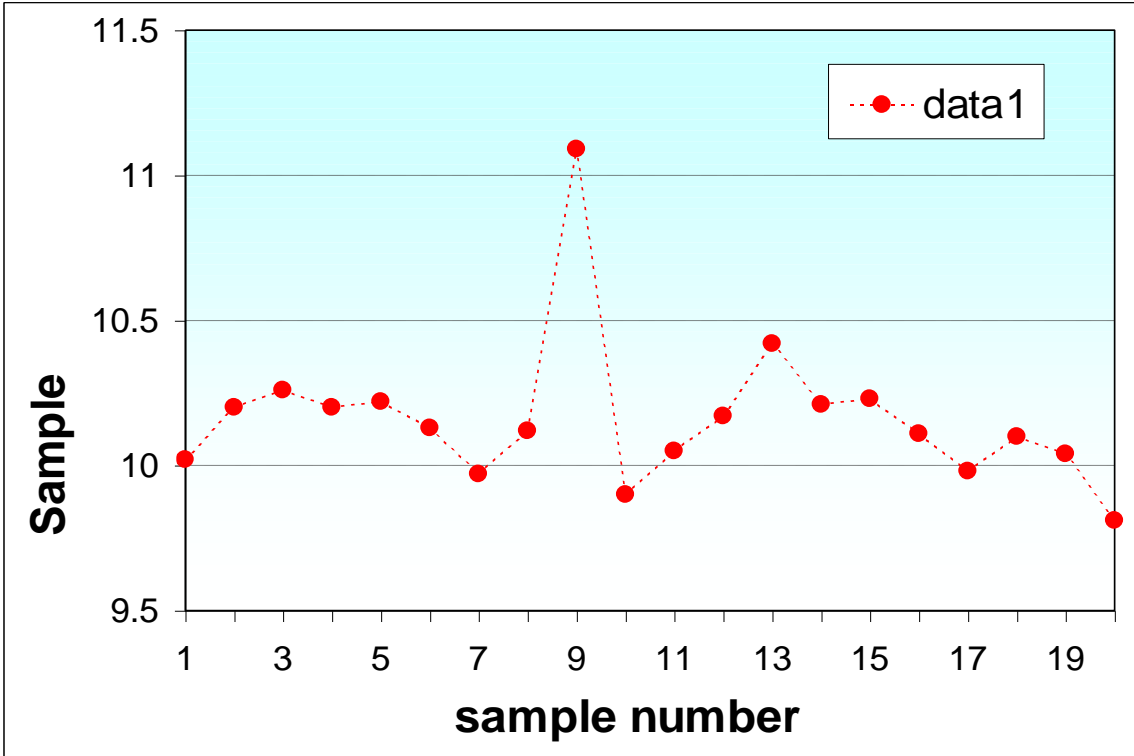
– כאשר סטיית התקן המדגמית של הממוצע :

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{N}}$$



קריטריון לפסילת נקודות חריגות

נתון אוסף הנקודות $y(i)$, הנקודה החשודה y^*



בהכללת הנקודה החורגת

$\mu^+ = 10.16$ ■

$\sigma^+ = 0.26$ ■

ללא הנקודה החורגת

$\mu^- = 10.11$ ■

$\sigma^- = 0.14$ ■

הקריטריון להוצאת נקודה:

$$|y^* - \mu^-| > 3\sigma^-$$

שמור ערכי נקודות שהוצאו ונמק מדוע ■

לא להפעיל לגבי נקודות קצה ■



אי וודאות Uncertainty

הגדרנו: שגיאה – ההפרש בין הגודל המדוד לגודל האמיתי (שאינו ידוע) ...

אי וודאות – סה"כ ההשפעה של כל השגיאות במערכת המדידה, בכיול ובשיטת המדידה על תחום הגדלים של המשתנה הנמדד

- שגיאות כיול – שגיאות שנובעות מתהליך הכיול שנועד למזער שגיאות
 - שגיאות סיסטמאטיות ואקראיות בסטנדרט הכיול
 - שיטת הכיול
- שגיאות מדידה (איסוף נתונים)
 - שגיאת חישה ומכשור
 - השפעות סביבה ותנאי עבודה
 - שגיאות התקנה והפעלה
 - שינויים מרחביים וזמניים בגודל הנמדד
- שגיאות עיבוד נתונים
 - אי-וודאויות בקירוב
 - שגיאות העגלה



רעש (noise) והפרעה (interference)

השפעה של משתנים חיצוניים:

- רעש – שינויים אקראיים בערך הנמדד
- הפרעה – שינויים דטרמיניסטיים מגמתיים בערך הנמדד

- אות מהרשת החשמלית
- רצוי לבקר את מקור ההפרעה או לבטל את המגמה

ניתן להתמודד עם רעש בשיטות סטטיסטיות בעוד שהפרעות מתחזות כאות אמיתי:

- חשוב למנוע מגמות מתחזות במדידה
- חשוב לשבור את המגמה של הפרעות כך שיראו כרעש.

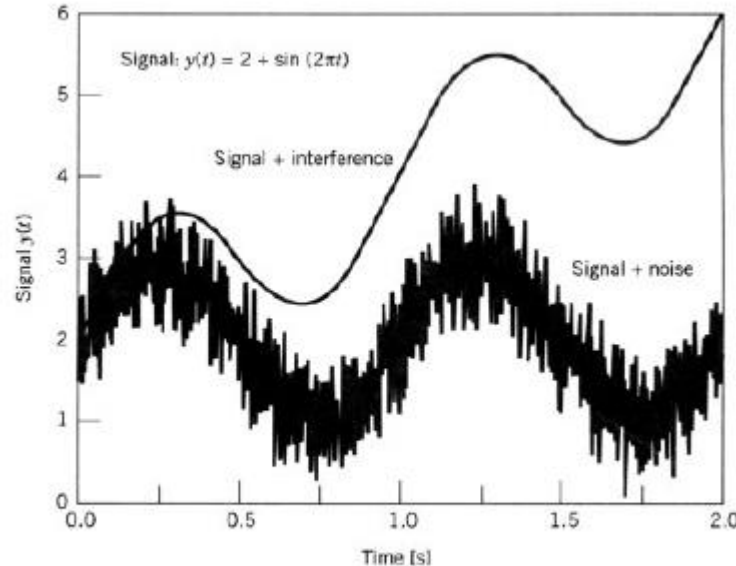


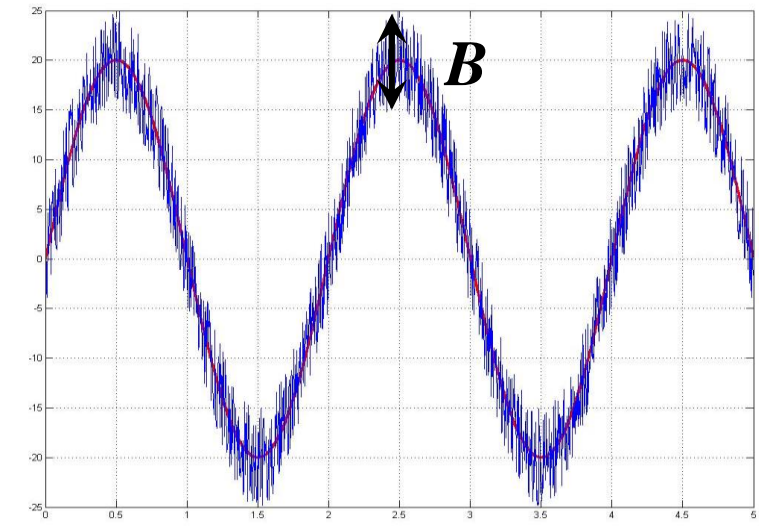
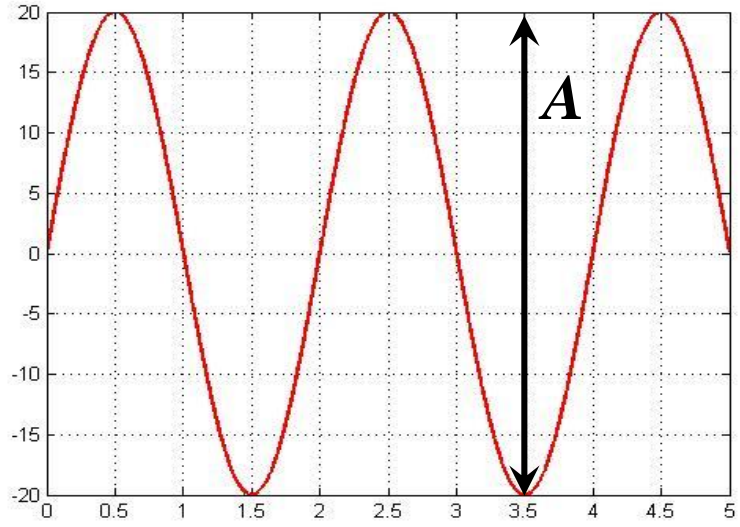
Figure 1.4 Effects of noise and interference superimposed on the signal $y(t) = 2 + \sin 2\pi t$.

שיטות התמודדות:

- מטריצת מדידות אקראית שוברת את המגמתיות של השפעות חיצוניות שנוצרת מקורלציה בין שינויים איטיים במשתנה החיצוני והסדר של המדידה
- חזרה (Repetition) על מדידה באותו ניסוי ושיחזור (Replication) של הניסוי – שיחזור מאפשר לקבוע באיזה מידה ניתן לשלוט על תנאי הניסוי
- הצלבת מדידות – מדידה של אותו גודל בשיטות שונות והצלבת תוצאות



ניתוח אי וודאות – יחס אות לרעש



יחס אות/רעש

:(signal-to-noise ratio)

יחסי משרעות התנודה
(או סטיות התקון) בין הקלט
הרצוי לבין חלק ההפרעה
בקלט המתאבך ומשפיע

$$\frac{A}{B} = (\text{signal} - \text{to} - \text{noise ratio})$$

$$SNR = 20 \log \frac{\text{Signal}}{\text{Noise}} = 20 \log \frac{E_{FSR}}{Q} = 20 \log(2^M)$$



מפרט סטטי: מרכיבי נכונות

1. שגיאת אפס

- שגיאת אפס הינה שגיאה מוחלטת קבועה בתחום

– דוגמא: שגיאת סחיפת אפס *Zero shift error*

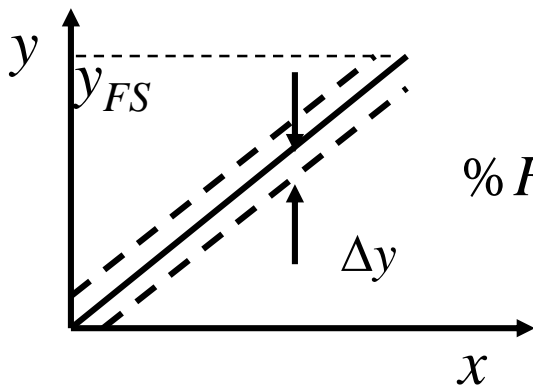
- מבוטאת כאחוז מהתחום (%Full Scale, %FS)

– דוגמא: מד לחץ FS=10bar

שגיאת אפס (היסט): +/- 1%FS ← +/- 0.1bar

- השגיאה יחסית (לקריאה) משתנה, גדולה במדידת גדלים

קטנים



$$\% FS = \frac{\Delta y}{y_{FS}} \cdot 100\%$$

– המשך הדוגמא: שגיאה יחסית

ב 10% מהקריאה = 1bar

ב 100% מהקריאה = 0.1 bar



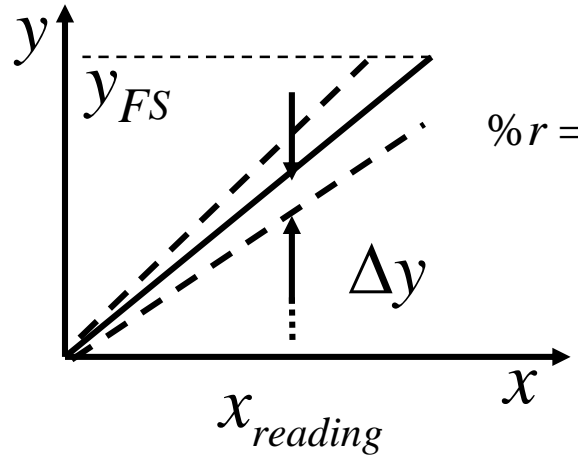
מפרט סטטי: מרכיבי נכונות

2. שגיאת רגישות

שגיאת רגישות Sensitivity error

- שגיאה יחסית (לקריאה) קבועה
- מבוטאת כאחוז קריאה ($\%r = \% \text{reading}$)
- דוגמא: מד לחץ FS=10bar שגיאת רגישות +/-5%

• שגיאת מוחלטת משתנה: גדלה עם הגודל הנמדד



$$\%r = \frac{\Delta y}{y_{reading}} \cdot 100\% = \frac{\Delta x}{x_{reading}} \cdot 100\%$$

- המשך הדוגמא:
- 0.5 bar at FS
- 0.05 bar at x=1bar



מפרט סטטי: מרכיבי נכונות

3. לינאריות, היסטריזיס וכושר הבחנה

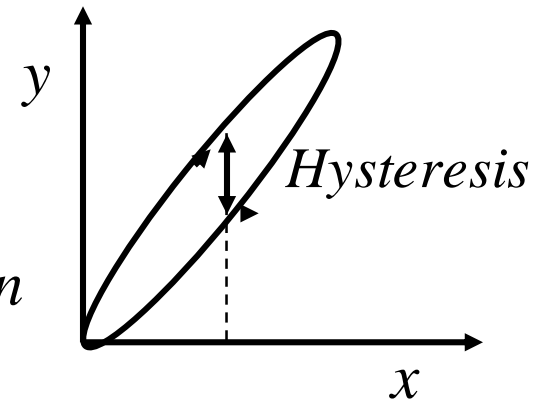
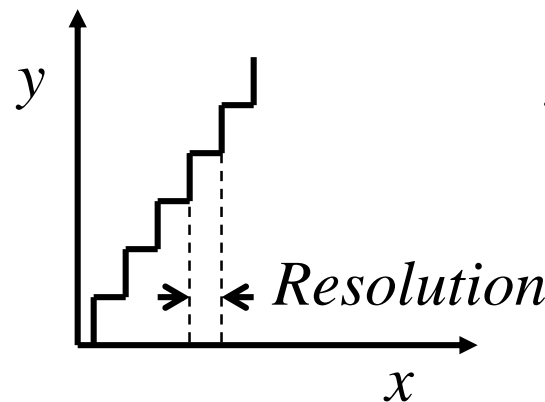
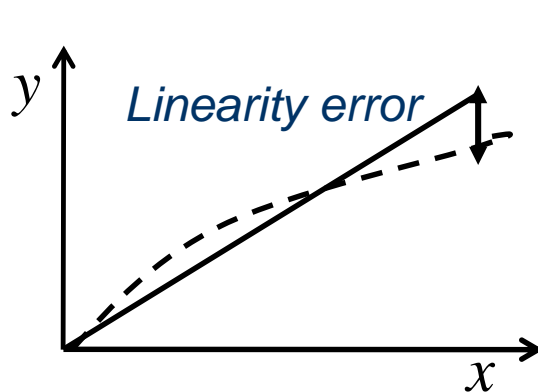
— לינאריות (Linearity): קרבת הקירוב הליניארי לקשר כניסה/יציאה

האמיתי:
$$e_L = y(x) - y_L(x) \quad \%(e_L)_{\max} = 100\% \frac{\max(e_L)}{FS}$$

— היסטריזיס (Hysteresis): הפרש בין מדידות של אותה כניסה כתלות בכיוון השינוי של הכניסה

$$e_h = \frac{y(x)_{up} - y(x)_{down}}{2} \quad \%(e_h)_{\max} = 100\% \frac{\max(e_h)}{FS}$$

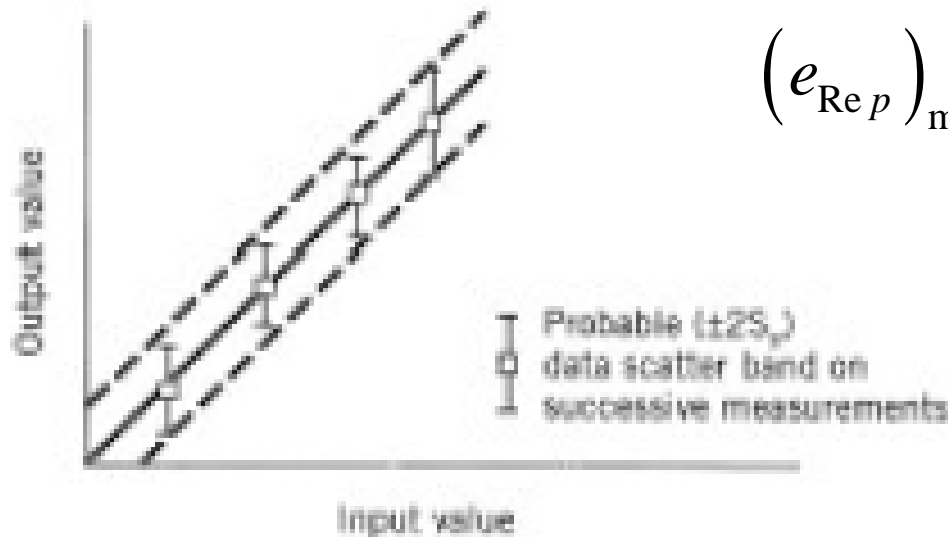
— הבחנה (Resolution): השינוי המינימלי שדרוש בכניסה כדי לגרום לשינוי ביציאה. דוגמאות: פוטנציומטר, ADC





מפרט סטטי: שגיאת הדירות

שגיאת הדירות Precision error - מרווח שגיאה הכולל
אחוז מסוים ממדידות חוזרות (באותו ניסוי – Repeatability,
או בניסויים שונים - Reproducibility)



$$\left(e_{Rep} \right)_{\max} \% = \frac{z\sigma}{FS} 100\%$$

(e) Repeatability error



דיוק - אי וודאות כללית

- השגיאה הכללית המקסימלית מבוססת על סכום כל השגיאות
- השגיאה הכללית ההנדסית (ריבועית):

$$e_{rss} = \left(\sum_{i=1}^M e_i^2 \right)^{1/2}$$

- חשוב: כל השגיאות מבוטאות באותו אופן!

– דוגמא: מכשיר עם שגיאת היסטריזיס, לינאריות, והדירות:

$$e_{rss} = [e_h^2 + e_L^2 + e_R^2]^{1/2}$$

כאשר כל השגיאות הן שגיאות מוחלטות

$$\%e_{rss} = [(\%e_h)^2 + (\%e_L)^2 + (\%e_R)^2]^{1/2} \quad \text{או}$$

כאשר כל השגיאות מבוטאות באחוזים מ-FS
(או כל השגיאות מבוטאות באחוזים מהקריאה)



דוגמא

■ נתון: מכשיר למדידת כוח עם הנתונים הבאים:

Resolution : $0.25 N$

Range : 0 to $100 N$

Linearity: within $0.20 N$ over range

Hysteresis: within $0.30 N$ over range

■ פתרון:



הערכת אי הוודאות במדידה עקיפה

לצורך הערכת גודל Y ואי הוודאות שלו המחושבים מכמה מדידות בלתי תלויות.

הגודל Y תלוי ב- n משתנים בלתי תלויים: x_1, x_2, \dots, x_n

בצורה: $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

כאשר אי ודאות כל משתנה: $\pm u_1, \pm u_2, \dots, \pm u_n$

ולכן המדידה ואי הוודאות הכוללת נתונה ע"י:

$$Y \pm U = f(x_1 \pm u_1, x_2 \pm u_2, \dots, x_n \pm u_n)$$



הערכת אי הוודאות במדידה עקיפה (2)

בהנחת אי-וודאויות קטנות, נפתח את Y לטור טיילור

$$\begin{aligned} Y + U &= f(x_1 \pm u_1, x_2 \pm u_2, \dots, x_n \pm u_n) = \\ &f(x_1, x_2, \dots, x_n) + u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + u_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + \\ &\frac{1}{2} \left[(u_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots \right] + O(\Delta^3) \end{aligned}$$



הערכת אי הוודאות במדידה עקיפה (3)

מתוך הפיתוח לטור טיילור והנחה (שמרנית)

של הצטברות אי-ודאויות נקבל Absolute Limit of Error :

$$U_a = \left| u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| + \left| u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| + \dots + \left| u_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|$$

$$U_r = \frac{U}{Y} \times 100 = \frac{100 U_a}{Y} \quad [\%]$$



הערכת אי הוודאות במדידה עקיפה (סיכום)

לכל מדידה ישנה שגיאת מדידה!

$$x \pm u_0$$

למדידה ישירה:

למדידה עקיפה:

$$U_a = \left| u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| + \left| u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| + \dots + \left| u_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|$$

$$U_{rss} \equiv \sqrt{\left(u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + \dots + \left(u_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2}$$



חישוב אי-וודאות במדידה עקיפה - דוגמה

חישוב אי-הודאות במדידת ההתנגדות של חוט נחושת

ההתנגדות החשמלית של נגד מתכתי נתונה ע"י:

$$R = R_0[1 + \alpha(T - 20)]$$

כאשר נתונים:

■ ההתנגדות החוט ב- 20°C $R_0 = 6\Omega \pm 0.3\%$

■ המקדם התרמי של ההתנגדות

$$\alpha = 0.004 \text{ } 1/^{\circ}\text{C} \pm 1\%$$

■ טמפרטורת החוט $T = 30^{\circ}\text{C} \pm 1^{\circ}\text{C}$

חשב את התנגדות החוט ואת אי-הודאות



חישוב אי-וודאות במדידה עקיפה - דוגמה

$$R =$$

$$u_{R_0} =$$

$$u_{\alpha} =$$

$$u_T =$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_0} =$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} =$$

$$\frac{\partial R}{\partial T} =$$



חישוב אי-וודאות במדידה עקיפה - דוגמה

כאשר אי-וודאות המערכת תחושב בשיטת U_{rss} :

כאשר אי-וודאות המערכת תחושב בשיטת U_a :

ספרות משמעותיות במדידות ובחישובים

ספרות משמעותיות – מושג חשוב. בכתיבה טכנית ומדעית מוסכם לשקף את דיוק הערכים ברישום ספרות משמעותיות **בלבד**.

כאשר רושמים תוצאה של מדידה תמיד ישנה ספרה שמתאימה לפרט הקטן ביותר שניתן למדוד או להעריך.

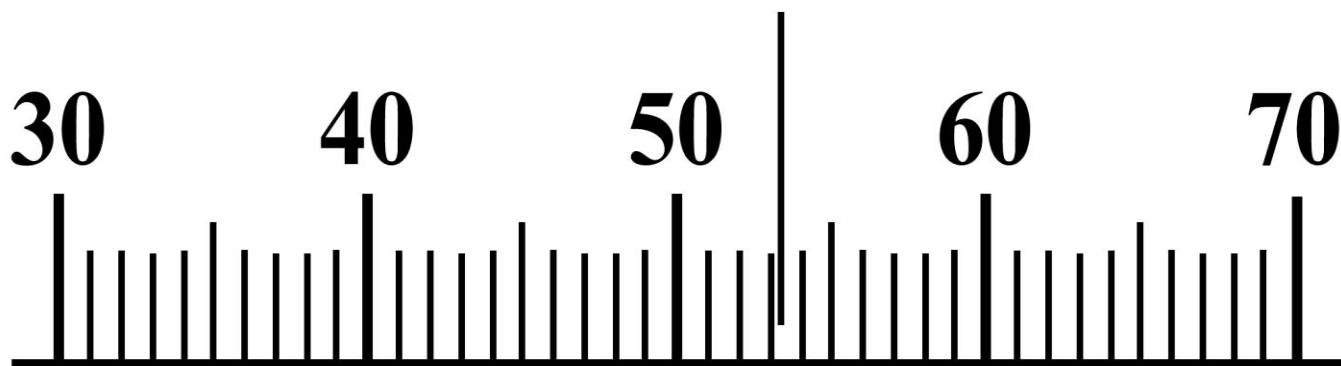
0.9

0.90

0.900

0.9000

ספרות משמעותיות - המשך



בוודאות אנו יכולים להגיד שהתוצאה היא **53**, אך אפשר להעריך גם חלק של השנתות הקטנות ביותר ולרשום את התוצאה כמו **53.2**. הספרה האחרונה (בדוגמה שלנו **2**) היא הספרה המשמעותית האחרונה. **למה?**

אם התוצאה של הדוגמה שלנו צריכים לרשום במיקרונים כמו **53200**, אי אפשר, כמובן, לא לכתוב את האפסים הקובעים את המספר. לכן אין שום אפשרות לדעת אם האפסים האחרונים משמעותיים אם לא. מסיבה זאת מקובל להשתמש ברישום שונה של מספרים כאלה: $5.32 \cdot 10^4$



ספרות משמעותיות

יש להקפיד על רישום נכון של תוצאות מדידה ע"פ הכללים של ספרות משמעותיות (ראה דוגמאות):

$\pi, e, c?$

3.14; 3.14159; 3.14159265

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi * 8.9^2}{4} = 62.21138852 \text{ [mm}^2\text{]} \Rightarrow$$

$$\rho = 62.3 \text{ [lbm/ft}^3\text{]}$$

to kg/m^3 : Multiply by 16.01846

$$\rho = 997.95006 \text{ [kg/m}^3\text{]} \Rightarrow$$